
О некоторых особенностях планирования и статистической обработки результатов усталостных испытаний образцов

А.В. Кулагин

Удмуртский государственный университет, г. Ижевск

Аннотация: предлагается обобщенный подход статистической обработки результатов усталостных испытаний образцов на основании выбора числовых характеристик параметра статической прочности, обработки результатов усталостных испытаний с использованием методов математической статистики, построения кривой усталости по данным линейного регрессионного анализа механических характеристик материалов конструкций и машин, определения параметров функции распределения предела выносливости по результатам обработки диаграмм ступенчатого изменения нагрузки.

Ключевые слова: статическая прочность, циклическая прочность, надежность, механические свойства материалов, предел выносливости, математическая статистика, линейный регрессионный анализ, метод ступенчатого изменения нагрузки, планирование испытания.

Некоторые общие теоретические закономерности оценки прочности и надежности в условиях статического и циклического нагружения элементов конструкций и деталей машин достаточно хорошо согласованы с практикой эксплуатации, что нашло отражение в ряде нормативных документов (ГОСТ 25.502-79. Расчеты и испытания на прочность в машиностроении. Методы механических испытаний металлов. Методы испытаний на усталость. РД 50-705-91. Методические указания. Расчеты и испытания на прочность в машиностроении. Планирование и статистическая обработка результатов статических испытаний и испытаний на усталость.) и научно-технических изданиях [1,2]. Однако, если при статическом нагружении проведение эксперимента и обработка его результатов не вызывает больших трудностей, то оценка усталостной прочности в силу многофакторности особенностей работы многих технических систем бывает довольно сложной и может привести к достаточно большому разбросу механических характеристик материалов. Поэтому попытаемся систематизировать статистику обработки результатов усталостных испытаний образцов в виде проведения 4-х основных этапов.

1. Выбор числовых характеристик параметра статической прочности

Механические свойства материала определяются по результатам испытаний ограниченного числа образцов (по выборке). Поэтому количественные оценки свойств материала являются статистическими оценками, так называемых, генеральных характеристик и определяются по формулам математической статистики [1-3].

Обозначим:

R_i - значение характеристики (параметра прочности), полученное в результате испытания i -ого образца;

$\langle R \rangle$ - среднее арифметическое параметра прочности;

S_R - выборочное среднее квадратичное отклонение;

S_R^2 - выборочная дисперсия параметра прочности;

V_R - выборочный коэффициент вариации;

n - объем выборки (количество образцов в партии).

Для расчета выборочных характеристик применяются следующие формулы:

$$\langle R \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i ;$$
$$S_R^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (R_i - \langle R \rangle)^2 ; \quad (1)$$

$$V_R = \frac{S_R}{\langle R \rangle}$$

Иногда при расчете показателей прочности и надежности пользуются не выборочными характеристиками механических свойств, а значениями границ доверительных интервалов для генеральных характеристик. Доверительный интервал для математического ожидания параметра прочности определяется на основании выборочных характеристик в виде

$$\langle R \rangle - \frac{S_R}{\sqrt{n}} t_{\alpha, \nu} < M(R) > \langle R \rangle + \frac{S_R}{\sqrt{n}} t_{\alpha, \nu} ,$$

где $M(R)$ - математическое ожидание параметра прочности;

α -уровень значимости;

$V=n-1$ - число степеней свободы;

$t_{\alpha, v}$ - критерий Стьюдента для уровня значимости α и числа степеней свободы v .

При определении доверительного интервала для генерального среднего квадратичного отклонения параметра прочности можно пользоваться выражением

$$S_R(1-q) < \sigma(R) < S_R(1+q),$$

в котором $\sigma(R)$ – генеральное среднее квадратичное отклонение параметра прочности;

q -величина, зависящая от уровня доверительной вероятности P и числа степеней свободы v , $P = 1 - \alpha$.

2. Обработка результатов усталостных испытаний.

Методика обработки зависит от того, какова была цель испытаний [4,5].

2.1. Определение долговечности (ресурса) образцов. Выборочные характеристики долговечности N определяется по формулам (1) с учетом равенства $R_i = \lg N_i$. При этом принимается гипотеза о нормальном распределении случайной величины $\lg N$.

2.2. Определение порога чувствительности по циклам. Считается, что долговечность (или, точнее ее количественная оценка, ресурс) распределена непрерывно в интервале от $N = N_0$ до $N = \infty$. Нижняя граница N_0 этого интервала и называется порогом чувствительности по циклам. При определении порога чувствительности исходят из предположения о нормальном законе распределения случайной величины $x = \lg(N - N_0)$. В соответствии с методом максимума правдоподобия расчет производится с использованием уравнения

$$\sum_{i=1}^n \frac{\ln N_i^*}{N_i^*} - \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n \ln N_i^* - \sum_{i=1}^n \left[\ln N_i^* - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln N_i^* \right]^2 \right\} \sum_{i=1}^n \frac{1}{N_i^*} = 0,$$

где $N_i^* = (N_i - N_0)$.

3. Построение кривой усталости (линейный регрессивный анализ).

В основе регрессивного анализа лежит нормальный закон распределения [4]. Целью его является установление количественной связи между максимальным напряжением и долговечностью образца. Уравнение эмпирической линии регрессии имеет вид

$$X = \langle x \rangle - m(y - \langle y \rangle), \quad (2)$$

где X – оценка условного математического ожидания величины x ; $x = \lg N$ – нормально распределенная случайная величина; $y = \lg \sigma_{\max}$ – независимая величина; σ_{\max} – максимальное напряжение (параметр цикла); $\langle x \rangle, \langle y \rangle, m$ – параметры уравнения линии регрессии.

Параметры уравнения (2) рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \\ \langle y \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i; \\ m &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)(y_i - \langle y \rangle)}{\sum_{i=1}^n (y_i - \langle y \rangle)^2}, \end{aligned}$$

где n – число уравнений напряжений.

Полученное таким образом уравнение соответствует осредненной кривой усталости (для вероятности разрушения $P=0,5$). Для построения доверительной области теоретической линии регрессии вычисляют:

дисперсию вокруг эмпирической линии регрессии

$$S^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (x_i - X_i)^2;$$

дисперсию параметров $\langle x \rangle, m$:

$$\begin{aligned} S_{\langle x \rangle}^2 &= \frac{S^2}{n}; \\ S_m^2 &= \frac{S^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \langle y \rangle)^2}; \end{aligned}$$

дисперсию оценки математического ожидания для уровня y

$$S_x = S_{\langle x \rangle} + S_m^2 (y < y \rangle)^2 \quad (3)$$

Границы области для доверительной вероятности рассчитывают по формуле

$$X - S_x t_{\alpha, v} < M(x) < X + S_x t_{\alpha, v}, \quad (4)$$

где $\alpha=1-p$ – уровень значимости;

$v=n-2$ – число степеней свободы (здесь n -объем выборки);

$t_{\alpha, v}$ – критерий Стьюдента;

Расчеты по формулам (3) и (4) производят отдельно для каждого уровня напряжений.

4. Определение параметров функции распределения предела выносливости (метод ступенчатого изменения нагрузки).

Метод предусматривает испытание серии образцов на нескольких уровнях напряжения (ГОСТ 25.502-79. Расчеты и испытания на прочность в машиностроении. Методы механических испытаний металлов. Методы испытаний на усталость. РД 50-705-91. Методические указания. Расчеты и испытания на прочность в машиностроении. Планирование и статистическая обработка результатов статических испытаний и испытаний на усталость.)

Первый образец испытывают при напряжении, равном ожидаемому пределу выносливости, а уровень напряжения для каждого последующего образца повышается по сравнению с предыдущим образцом, если тот не разрушился, и понижается, если предыдущий образец разрушился. Перепад α между уровнями напряжений выбирается постоянным и не превышающим двух значений среднего квадратичного отклонения предела выносливости при любом выбранном методе схематизации процессов нагружения, то есть на рисунке 1а) это соответствует разбросу по экстремумам напряжений d_4+d_7 , а на рисунке 1б) для этих же напряжений-это размах $2 A_2$ и так далее,

сравнивая попарно все пиковые напряжения при проведении однотипных испытаний и 8 измерениях.

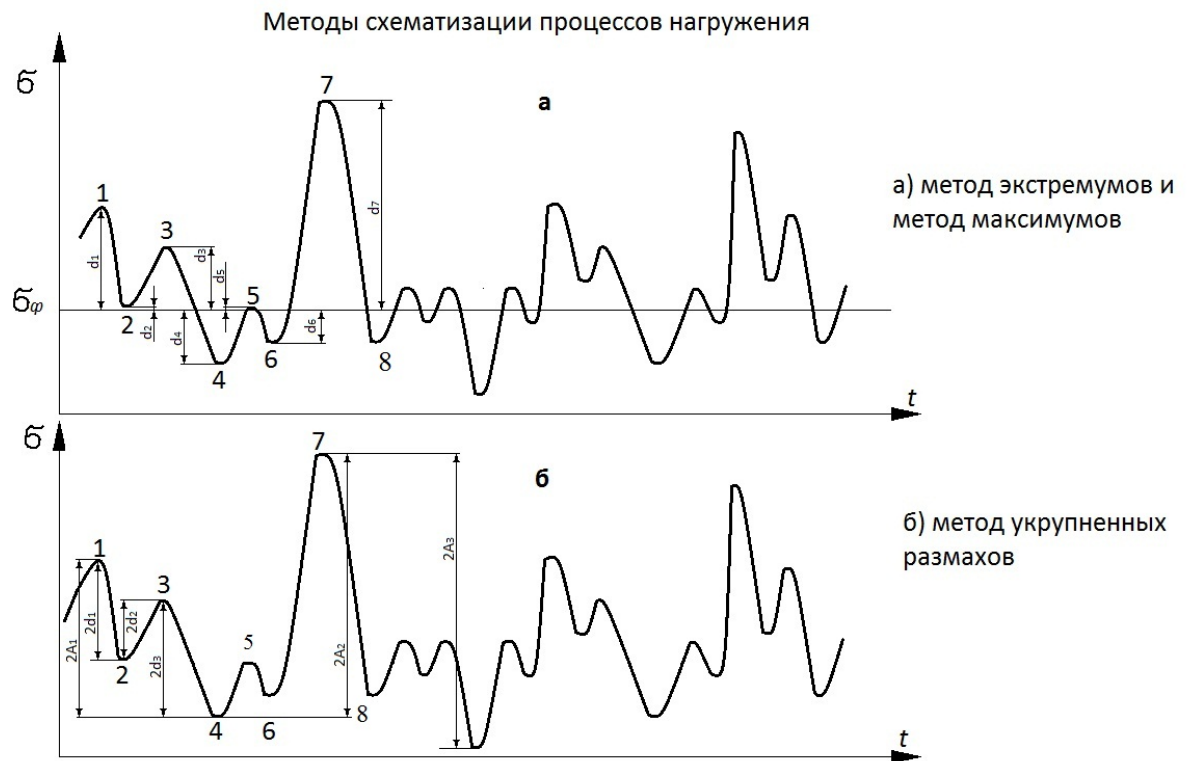


Рис.1- Оценка уровня усталостных напряжений во времени

После испытания подсчитывают общее число разрушений и общее число не разрушений и выбирают N_{min} - наименьшее из них. Пусть менее частое событие происходило при напряжениях $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_k$ с соответствующими частотами $n_0, n_1, \dots, n_i, \dots, n_k$. Тогда оценка среднего значения предела выносливости производится по формуле

$$\langle \sigma_{-1} \rangle = \sigma_0 + d \left[\frac{1}{N_{min}} \sum_{i=1}^k i n_i \pm 0,5 \right],$$

в которой знак плюс (+) ставится, когда N_{min} число не разрушений, а знак минус (-) когда N_{min} число разрушений.

Среднее квадратичное отклонение предела выносливости определяется в виде

$$S_{\sigma_{-1}} = 1,62d \left[\frac{N_{min} \sum_{i=1}^k i^2 n_i - (\sum_{i=1}^k i n_i)^2}{N_{min}^2} + 0,029 \right]$$

Теперь переходим к планированию механических испытаний с учетом и без учета цикличности нагружения.

Основная задача планирования испытания заключается в определении объема выборки. Если целью испытания является оценка характеристик статической прочности или усталостной долговечности при уровне значимости α , то необходимое количество образцов вычисляют по формулам:

$$n_M = \frac{V}{\varepsilon_M^2} U_p^2;$$
$$(1 + \varepsilon_\sigma)^2 = \frac{X_{\alpha/2}^2}{X_{0.5}^2},$$

где n_M – число образцов среднего значения характеристики прочности с предельной относительной ошибкой ε_M ;

V – коэффициент вариации генеральной совокупности (задаются на основании уже имеющихся данных по аналогичным материалам);

U_p – квантиль нормального распределения вероятностей $P=1-\alpha/2$;

ε_σ – предельная относительная ошибка среднего квадратичного отклонения характеристики прочности;

$X_{\alpha/2}^2, X_{0.5}^2$ – критерий Пирсона для вероятностей $P=\frac{\alpha}{2}$ и $P=0,5$, соответственно,

и числа степеней свободы $\nu=n-1$;

n_σ – число образцов, необходимое для определения среднего квадратичного отклонения с ошибкой ε_σ , находится в результате решения второго уравнения методом последовательных приближений.

Из двух значений объема испытаний n_M и n_σ выбирается наибольшее значение. Если в результате испытания дается оценка новой технологии или

другого фактора, изменяющего прочностные свойства материала, то формулы имеют вид:

$$n_M = \frac{v^2}{\varepsilon_M^2} (U_{1-\frac{\alpha}{2}} + U_{1-\beta})^2;$$

$$(1 + \varepsilon_\sigma)^2 = \frac{X_{\alpha/2}^2}{X_{0,5}^2},$$

где α – уровень значимости, представляющий собой достаточно малую вероятность отрицательной оценки более эффективной технологии (ошибка первого рода);

β – достаточно малая вероятность положительной оценки менее эффективной технологии (ошибка второго рода).

Значения ошибок рекомендуется выбирать в пределах $\varepsilon_M = 0,01 - 0,05$;

$\varepsilon_\sigma = 0,1 - 0,5$; а вероятности ошибок первого и второго рода – $\alpha = 0,05 - 0,1$; $\beta = 0,05 - 0,1$.

Для построения осредненной кривой усталости рекомендуется проводить испытания на 4 – 5 уровнях напряжения. Максимальный уровень выбирается с учетом требований на протяженность левой ветви кривой усталости, а минимальный подбирается опытным путем так, чтобы долговечность меньше базового числа циклов показали не более, чем 50% образцов, разрушенных при напряжении этого уровня. Образцы по уровням напряжений следует распределять равномерно. Общее количество образцов, необходимое для построения осредненной кривой усталости при относительной предельной ошибке ε предела выносливости и уровне значимости α , находится по формуле

$$n = K U_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \frac{v^2}{\varepsilon^2},$$

где K – число параметров уравнения линии регрессии.

Формулой можно воспользоваться и при расчете количества образцов, необходимого для определения медианного значения предела выносливости с заданной точностью и надежностью. При этом кривая усталости описывается двухпараметрическим уравнением ($K = 2$).

Далее, используя результаты 4-х этапов можно, например, перейти к решению задачи по единому критерию усталостной прочности, уточнению параметров внешних циклических воздействий и рационального выбора материалов, что потребует экспериментальной проверки [7-10].

Литература

1. Степнов М.Н., Шаврин А.В. Статистические методы обработки результатов механических испытаний. Справочник. - М.: Машиностроение, 2005. - 399 с. - 2-е издание исправленное и дополненное.

2. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов/ Под ред. Александрова А.В. — 3-е издание исправленное. М.: Высшая школа, 2003. 560 с: ил.

3. Хальд А. Математическая статистика с техническим приложением. М.: Изд. Иностран. лит., 1956. 664 с.

4. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. - М.: Вильямс, 2016. - 912 с.

5. Протоdjяконов М.М., Тедер Р.И. Методика рационального планирования экспериментов. - Л.: Наука, 2013. - 338 с.

6. Болотин, Владимир Васильевич. Ресурс машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1990. – 446 с

7. Davidson D.L., Lankford J. Fatigue crack growth in metals and alloys: mechanisms and micromechanics // International Materials Reviews. – 1992 – V. 37– № 2 – pp. 45-76.

8. Mughrabi H., Christ H.-J. Cyclic deformation and fatigue of selected ferritic and austenitic steels; specific aspects // ISIJ International. – 1997 – V. 37 – № 12 – pp. 1154-1169.

9. Кулагин А.В., Дородов П.В. О запасе прочности и оценке надежности узлов металлоконструкций // Инженерный вестник Дона, 2012. - № 2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2012/810.

10. Кулагин А.В., Дородов П.В. Исследование напряжений возле плоского горизонтального выреза // Инженерный вестник Дона. - 2012. - № 2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2012/813.

References

1. Stepnov M. N., Shavrin A.V. Statisticheskie metody obrabotki rezul'tatov mekhanicheskikh ispytaniy [Statistical methods of processing the results of mechanical tests]. Handbook Moscow: Mechanical Engineering, 2005. 399 p. 2nd edition, revised and supplemented.

2. Aleksandrov A.V., Potapov V. D., Derzhavin B. P. Soprotivlenie materialov [The mechanics of materials]. Proc. for universities. Aleksandrov A.V., Potapov, Derzhavin; under the editorship of Aleksandrova A. V. 3rd ed. ISPR. M.: Higher. SHK, 2003. 560 p: II.

3. Hald A. Matematicheskaya statistika s tekhnicheskim prilozheniem [Mathematical statistics with technical application]. M.: Izd. Foreign. lit., 1956. 664 p.

4. Draper N., Smith G. Prikladnoy regressionnyy analiz [Applied regression analysis]. M.: Williams, 2016. 912 p.

5. Protodyakonov M. M., Teder R.I. Metodika ratsional'nogo proektirovaniya eksperimentov [Methods of rational planning of experiments]. L.: Science, 2013. 338 p.

6. Bolotin V.V. Resurs mashin i konstrukcij [Resource of machines and structures]. M.: Mechanical Engineering, 1990. 446 p.



7. Davidson D.L., Lankford J. International Materials Reviews. 1992. V. 37. № 2. pp. 45-76.
8. Mughrabi H., Christ H.-J. ISIJ International. 1997 V. 37. № 12. pp. 1154-1169.
9. Kulagin A.V., Dorodov P.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012. № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2012/810.
10. Kulagin A.V. Dorodov, P. V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012. № 2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2012/813.