Методика анализа абсолютной устойчивости нелинейных импульсных систем посредством ЭВМ на основе иннорного подхода

В.Н. Смоляков

Северо-Кавказский филиал Московского технического университета связи и информатики, Ростов-на-Дону

Аннотация: Анализ абсолютной устойчивости сводится к решению задачи о распределении корней вещественного полинома по отношению к единичной окружности. Предлагаются рекуррентные выражения, позволяющие посредством ЭВМ определить коэффициенты полинома для системы любого порядка. Приводится машинная методика решения задачи о распределении корней полинома путем вычисления определителей инноров и подсчета числа перемен знака в специальных рядах значений иннорных определителей, элементы которых однозначно связаны с параметрами исследуемой системы.

Ключевые слова: нелинейные импульсные системы, вычисление коэффициентов полинома, построение иннорных матриц, определение абсолютной устойчивости на основе анализа распределения корней полинома путем вычисления определителей инноров.

В [1] была предложена методика анализа абсолютной устойчивости нелинейных импульсных систем (НИС) по знакам определителей инноров. Возможно решение этой задачи путем выявления распределения корней вещественного полинома по отношению к единичной окружности.

Устойчивость НИС является обязательным условием ее работоспособности. Критерий абсолютной устойчивости нелинейных импульсных систем (НИС) с неустойчивой или нейтральной линейной импульсной частью (ЛИЧ) имеет вид [2 - 4]:

$$Re\frac{1+kW(j\overline{\omega})}{1+rW(j\overline{\omega})}>0, \quad \forall\overline{\omega}\in[-\pi;+\pi], \tag{1}$$

$$W(j\varpi)=\frac{1}{T_0}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}W(j\omega+j\omega_0), \tag{2}$$

где T_0 - период квантования; ω_0 – частота квантования; ω – круговая частота; $W(j\overline{\omega})$ - частотная характеристика ЛИЧ НИС

Графическую проверку выполнения критерия (1) для систем с ЛИЧ, описываемой дифференциальными уравнениями высокого порядка, практически выполнить сложно ввиду трансцендентности выражения (2). Эти затруднения можно устранить, используя *z*-преобразование. В этом случае критерий абсолютной устойчивости (1) примет вид:

$$Re\frac{1+kW_{ЛИЧ}(z)}{1+rW_{ЛИЧ}(z)}>0, \quad \forall z:|z|=1, \tag{3}$$

где

$$W_{ЛИЧ}(z)=k_0\frac{\sum_{i=0}^{n}c_i z^i}{\sum_{i=0}^{n}d_i z^i}, \tag{4}$$

k_0, c_i, d_i – коэффициенты, выражаемые через параметры ЛИЧ НИС;

n – порядок передаточной функции $W_{ЛИЧ}(z)$.

Характеристика $\Phi(\sigma)$ нелинейного элемента (НЭ) удовлетворяет условию:

$$r\le\frac{\Phi(\sigma)}{\sigma}\le k, \quad r_1\le\frac{d\Phi(\sigma)}{d\sigma}\le k_1, \quad \Phi(0)=0 \tag{5}$$

Подставляя (4) в (3), получим критерий абсолютной устойчивости НИС в следующем виде:

$$Re\frac{P(z)}{Q(z)}>0, \quad \forall z:|z|=1, \tag{6}$$

где $$P(z)=\sum_{i=0}^{n}p_i z^i, \quad p_i=c_i+k_0kd_i; \quad Q(z)=\sum_{i=0}^{n}q_i z^i, \quad q_i=d_i+k_orc_i. \tag{7}$$

Преобразуя выражение (6), получим [2, 5, 6]:

$$Re\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{1}{2}\frac{P(z)Q(z^{-1})+P(z^{-1})Q(z)}{Q(z)Q(z^{-1})}>0, \quad \forall z:|z|=1, \tag{8}$$

Выражение $Q(z)Q(z^{-1})$ строго положительно для всех z: $|z|$ = 1, следовательно, условие (8) можно заменить равносильным полиномиальным неравенством:

$$F(z,z^{-1})=\frac{1}{2}[P(z)Q(z^{-1})+P(z^{-1})Q(z)]>0,\quad \forall z:|z|=1, \tag{9}$$

т.е. критерий абсолютной устойчивости НИС выполняется, если полином $F(z,z^{-1})$ не имеет корней на окружности единичного радиуса. Запишем многочлен $F(z,z^{-1})$ в следующем виде [4, 7, 8]:

$$F(z,z^{-1})=\sum_{i=0}^{n}b_i(z^i+z^{-i}).$$

где

$$b_i=\frac{1}{2}\sum_{j=i}^{n}(q_j p_{j-1}+q_{j-1}p_j). \tag{10}$$

Тогда очевидно выполнение равенства

$$F(z,z^{-1})=z^{-n}\sum_{i=0}^{n}b_i(z^{n+i}+z^{n-i})=z^{-n}F_1(z).$$

Полином $F_1(z)$ содержит на единичной окружности столько же корней и той же кратности, что и полином $F(z, z^{-1})$ [4] и является симметричным. Следовательно, неравенство (9) выполняется, если полином $F(z)$ имеет n корней внутри (вне) единичного круга, при этом необходимым условием выполнения неравенства (9) является следующее:

$$\sum_{i=0}^{n}b_i>0. \tag{11}$$

Для нахождения числа корней полинома, лежащих внутри единичного круга, удобно использовать иннорный подход [4, 9, 10, 11], однако прежде необходимо устранить симметричность полинома, т.к. иначе иннорный метод неприменим. С этой целью заменим полином $F_1(z)$ следующим многочленом:

$$G(z)=\left(\frac{dF_1(z)}{dz}\right)^*=\left(\sum_{i=0}^{n}b_i[(n+i)z^{n+i-1}+(n-i)z^{n-i-1}]\right)^*=\sum_{i=0}^{n}b_i[(n+i)z^{n-i}+(n-i)z^{n+i}]. \tag{12}$$

где звездочкой * обозначена операция сопряжения.

Полином $G(z)$ имеет внутри единичного круга столько же корней, что и исходный полином $F_1(z)$ [4], следовательно, если число корней полинома $G(z)$ внутри единичного круга равно n, то равносильное критерию (3) нераравенство (9) выполнится.

Подставляя (10) с учетом (7) в правую часть выражения (12), после преобразований получим:

$$G(z)=\sum_{i=0}^{2n-1} a_i z^i, \tag{13}$$

где

$$a_i=(2n-1)\sum_{j=|n-i|}^{n}[k_0^2 rkc_j c_{j-|n-i|}+k_0\frac{r+k}{2}(c_j d_{j-|n-i|}+c_{j-|n-i|}d_j)+d_j d_{j-|n-i|}], \tag{14}$$

при этом необходимое условие (11) принимает вид:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{2n-i}>0. \tag{15}$$

Выражения (14) и (15) легко сводятся к однородным вычислительным процедурам, следовательно, нахождение значений коэффициентов полинома $G(z)$ по известным параметрам НИС и проверка выполнения неравенства (15) посредством ЭВМ не вызовет затруднений.

Для определения числа корней полинома $G(z)$ внутри единичной окружности воспользуемся теоремой Э. Джури [4]: число корней вне единичного круга для вещественного многочлена вида (13) с $a_N>0$ ($N=2n-1$) равно:

$$M=V(\Delta_{N-1}^{-},\Delta_{N-3}^{-},...,\Delta_2^{-},1,\Delta_2^{+},\Delta_4^{+},...,\Delta_{N-1}^{+})+\gamma,$$

где γ равно 1 или 0 в зависимости от знака $G(1)* G(-1)$;

$\Delta_2^{\pm}$, $\Delta_4^{\pm}$, $\Delta^{\pm N}_{N-1}$ – определители инноров 2, 4,…, n-1-го порядка следующих двух матриц (со знаками «+» и «-»):

$$\Delta^{\pm}_{N-1} = \begin{pmatrix} a_n & a_{N-1} & a_{N-2} & \dots & \dots & a_3 & (a_2\pm a_0) \\ & a_n & a_{N-1} & a_{N-2} & \dots & (a_4\pm a_0) & (a_3\pm a_1) \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & \Delta^{\pm}_4 = & \boxed{\begin{matrix} a_N & a_{N-1} & a_{N-2} & (a_{N-3}\pm a_0) \\ 0 & \Delta^{\pm}_2\ a_N & (a_{N-1}\pm a_0) & (a_{N-2}\pm a_1) \\ 0 & \pm a_0 & (a_N\pm a_1) & (a_{N-1}\pm a_2) \\ \pm a_0 & \pm a_1 & \pm a_2 & (a_N\pm a_3) \end{matrix}} & & \dots & \dots \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \pm a_0 & \pm a_1 & \pm a_2 & \dots & (a_N\pm a_{N-4}) & (a_{N-1}\pm a_{N-3}) \\ \pm a_0 & \pm a_1 & \pm a_2 & \dots & \dots & \pm a_{N-3} & (a_N\pm a_{N-2}) \end{pmatrix} \qquad (16)$$

Следовательно, условия нахождения корней полинома $G(z)$ внутри единичной окружности принимает вид $n = 2n - 1 - M$, откуда

$$(\Delta^{-}_{N-1},\ \Delta^{-}_{N-3},\dots,\Delta^{-}_{2},\ 1,\ \Delta^{+}_{2},\Delta^{+}_{4},\dots,\Delta^{+}_{N-1}) + \gamma = n - 1. \qquad (17)$$

Коэффициенты полинома $G(z)$ однозначно связаны с параметрами НИС, следовательно, выполнение равенства (17) является достаточным условием абсолютной устойчивости системы.

Для вычисления значений определителей матриц (16) их можно привести к треугольной форме, используя алгоритм исключения Гаусса [9]. Однако специальный вид матриц (16) (наличие левого треугольника нулей) обеспечивает чрезвычайную эффективность алгоритма двойной триангуляризации [4, 10], позволяющего с минимальными затратами определить значения инноров посредством ЭВМ.

Таким образом, вся процедура анализа абсолютной устойчивости НИС: нахождение коэффициентов полинома $G(z)$, проверка выполнения неравенства (15), формирование матриц (16), двойная триангуляризация и вычисление определителей инноров, подсчет числа перемен знака в ряду $V(\cdot)$, входящем в равенство (17), вычисление значений γ, может быть проведены посредством ЭВМ. Блок-схема программы, решающей данную задачу, приводится на рис. 1.

В данной программе ряд $V(\cdot)$ = был представлен в следующем виде:

$$V(\cdot) = V_1(1, \Delta_2^-, \Delta_4^-, \Delta^-_{N-1}) + V_2(1, \Delta_2^+, \Delta_4^+, \Delta^+_{N-1}),$$

что позволило формировать матрицы Δ^-_{N-1} и Δ^+_{N-1} на ЭВМ, проводить их двойную триангуляризацию, вычисление определителей инноров и подсчет числа перемен знака в рядах $V_1(\cdot)$ и $V_2(\cdot)$ последовательно, используя одни и те же массивы и вычислительные блоки, за счет чего существенно снизились требования к объему памяти ЭВМ на решение задачи.

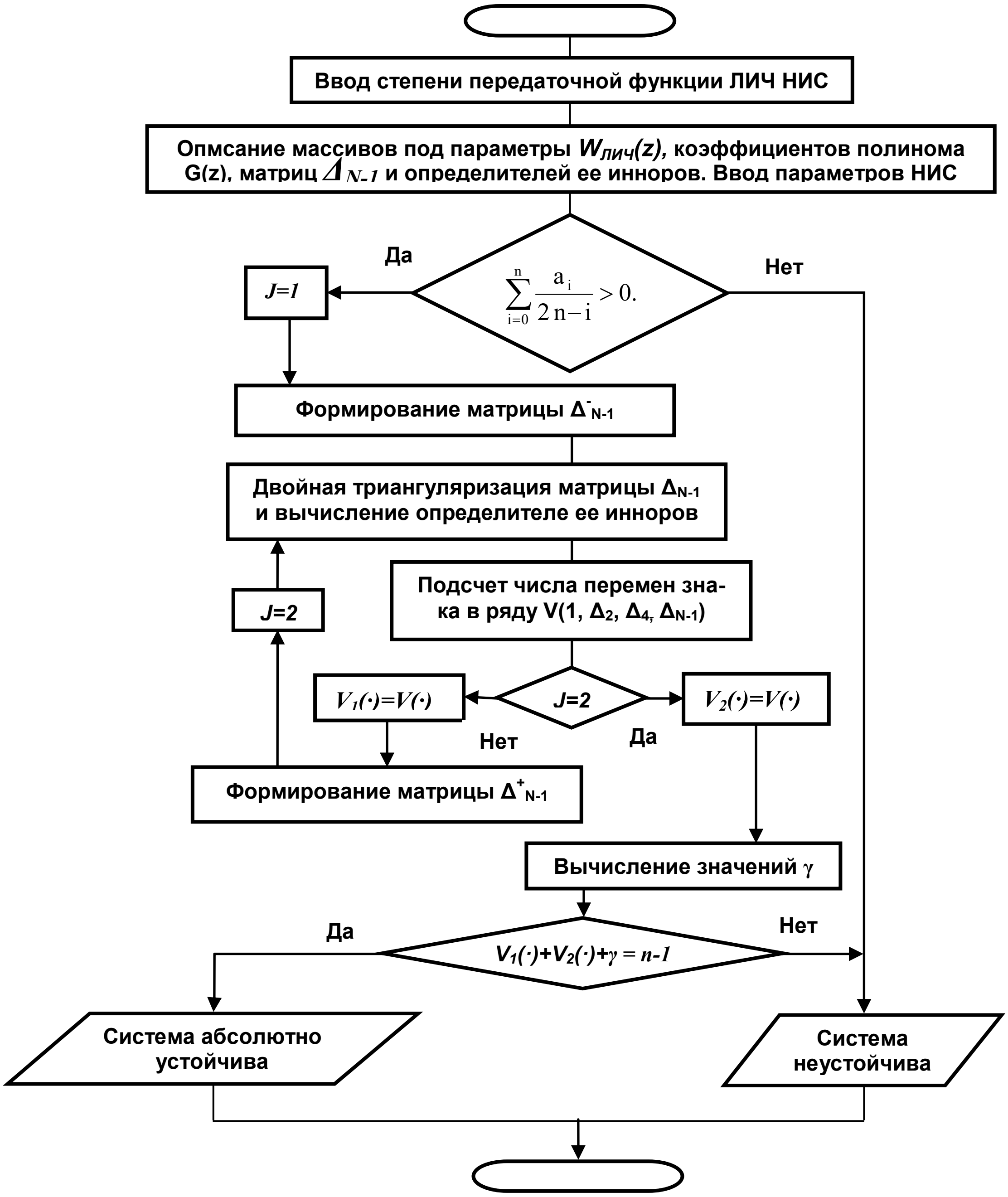

Рис. 1 – Схема алгоритма анализа абсолютной устойчивости НИС

Иллюстративный пример [2]: Проведем анализ абсолютной устойчивости НИС 5-го порядка, передаточная функция ЛИЧ которой в *z*- форме имеет вид:

$$W_{ЛИЧ}(z) = 2{,}24\frac{2{,}278z^4 - 2{,}405z^3 - 2{,}778z^2 + 3{,}605z - 1}{41.09z^5 - 98{,}37z^4 + 74{,}795z^3 - 18{,}532z^2 + z},$$

а характеристика нелинейного элемента удовлетворяет условию (5) с параметрами $r = 0{,}5$; $k = 5$. В результате работы предлагаемой программы получим:

$$G(z) = 1525z^9 – 8076z^8 + 21977z^7 - 44036z^6 + 64492z^5 - 66054z^4 + 51279z^3 –$$

$$- \quad 32303z^2 + 21977z – 2531; \quad \sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{2n-i} = 6449 > 0.$$

$$\Delta_2^- = -4{,}57822\cdot10^6; \quad \Delta_4^- = -1{,}46064\cdot10^{13}; \quad \Delta_6^- = 2{,}1225\cdot10^{20};$$

$$\Delta_8^{--} = 5{,}39569\cdot10^{22}; \quad \Delta_2^+ = -3{,}58203\cdot10^6 \quad \Delta_4^+ = -1{,}07141\cdot10^{14};$$

$$\Delta_6^{+-} = -2{,}02346\cdot10^{21}; \quad \Delta_8^+ = 2{,}42041\cdot10^{27}; \quad \gamma = 0;$$

$$V(\cdot) + \gamma = V_1(\cdot) + V_2(\cdot) + \gamma = V(+, +, -, -, 1, -, -, -, +) + 0 = 4 = n - 1.$$

Следовательно, исследуемая НИС абсолютно устойчива.

Литература

1. Смоляков В.Н. Анализ абсолютной устойчивости нелинейных импульсных систем посредством вычисления иннорных определителей // Инженерный вестник Дона, 2016, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2016/3528/.

2. Цыпкин Я.З., Попков Ю.С. Теория нелинейных импульсных систем. М.: Наука, 1973, 416 с.

3. Соколов С.В., Синютин С.А. Решение задачи тесной интеграции инерциально-спутниковых навигационных систем, комплексируемых с одометром // Инженерный вестник Дона, 2014, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/ archive/ n4y2014/2716/.

4. Джури Э. Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука. 1979, 304 с.

5. Серпенинов О.В., Соколов С.В., Тищенко Е.Н. Криптографическая защита информации. МОН РФ, РГЭУ, 2011, 251с.

6. Смирнов Ю.А., Соколов С.В., Титов Е.В. Основы микроэлектроники и микропроцессорной техники. Лань, 2013, 656 с.

7. Соколов С.В., Югов Ю.М. Synthesis of integrated inertial and satellite navigational systems on the basis of stochastic filter, invariant to object model. ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences, vol. 10, № 1, January 2015, pp. 265-273.

8. Соколов С.В. Синютин С.А. Лукасевич В.И. Тесная интеграция инерциально-спутниковых навигационных систем, комплексируемых с одометром, на основе использования электронных карт // Инженерный вестник Дона, 2014, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2717/.

9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 5-е изд. М.: Физматлит, 2004. 560 с.

10. Jury I., Ahn S.M. A compulatioal algorithm for inners. IEEE Trans. on Automatic Control. 1972. V. AC-17, 541 – pp. 543.

11. Смирнов Ю.А., Соколов С.В., Титов Е.В. Основы нано- и функциональной электроники. Лань, 2013, 448 с.

References

1. Smolyakov V.N. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2016, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2016/3528/.

2. Tsypkin Ya.Z., Popkov Yu.S. Teoriya nelineynykh impul'snykh sistem. M.: Nauka, 1973, 416 p. [The theory of nonlinear pulse systems. M.: Nauka, 1973, p. 416].

3. Sinyutin S.A., Sokolov S.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2014, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/ archive/ n4y2014/2716/.

4. Dzhuri E. Innory i ustoychivost' dinamicheskikh sistem. M.: Nauka. 1979, 304 p. [Juri E. Innory and stability of dynamic systems].

5. Serpeninov O.V., Sokolov S.V., Tishchenko E.N. Kriptograficheskaya zashchita informatsii. MON RF, RGEU, 2011, 251 p. [Cryptographic protection of information. Ministry of Education of the Russian Federation].

6. Smirnov Yu.A., Sokolov S.V., Titov E.V. Osnovy mikroelektroniki i mikroprotsessornoy tekhniki. Lan', 2013, 656 p. [Fundamentals of microelectronics and microprocessor technology].

7. Sokolov S.V., Yugov Yu.M., vol. 10, № 1, January 2015, pp. 265-273.

8. Sokolov S.V. Sinyutin S.A. Lukasevich V.I. Inženernyj vestnik Dona (Rus) 2014, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2717/.

9. Gantmakher F.R. Teoriya matrits. 5-e izd. M.: Fizmatlit, 2004. 560 p. [The theory of matrices].

10. Jury I., Ahn S.M. IEEE Trans. on Automatic Control. 1972. V. AC-17, pp. 541 – 543.

11. Smirnov Yu.A., Sokolov S.V., Titov E.V. Osnovy nano- i funktsional'noy elektroniki. Lan', 2013, 448 p. [Basics of nanotechnology and functional electronics].