

## Синтез кинематических поверхностей на основе эллиптического поворота плоскости

*Я.А. Кокарева*

*Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

**Аннотация:** В статье рассмотрен алгоритм формообразования кинематических поверхностей с постоянной площадью сечения на основе сложного эквиаффинного преобразования плоскости – эллиптического поворота. Определены функциональные зависимости параметров эллиптического поворота для формирования однопараметрического семейства эквиаффинных линий на плоскости. При этом полученные семейства линий могут не включать в себя линию-прообраз и линию-образ при заданных постоянных параметрах поворотов. Определены условия получения линии-прообраза и линии-образа при заданном параметре семейства и параметрические уравнения смещения геометрического центра кривой. Определены условия образования центральных поверхностей. Установлено, что полученные поверхности могут быть периодическими. Определены области допустимых значений параметров и функций, входящих в параметрические уравнения однопараметрических семейств кривых. Показано, что в качестве замкнутого контура можно использовать не только аналитически определенную кривую, но и полилинию (например, многоугольник). Приведены примеры кинематических поверхностей.

**Ключевые слова:** кинематическая поверхность, эквиаффинные преобразования, алгоритм, эллиптический поворот, аффинно подобные кривые, параметрические уравнения, линия-образ, линия-прообраз.

Геометрическая модель часто является первым этапом к конструированию и исследованию сложных физических и математических моделей, поэтому играет важную роль в процессе моделирования. Особенное место занимает формообразование поверхностей с заданными геометрическими или дифференциальными характеристиками, аналитические модели которых позволяют проводить численное моделирование конструкций, деталей, процессов и явлений.

Данные исследования являются обобщением и продолжением работ [1-3] в области конструирования поверхностей кинематическим способом на основе эквиаффинных преобразований плоскости (ЭПП), несущей каркас образующих плоских кривых. Ранее были получены параметрические уравнения в общем виде с произволом выбора образующей кривой и

---

функций, определяющих траекторию движения точки, для поверхностей с плоскостью параллелизма  $XOY$ . Целью дальнейших исследований стало исследование траекторий точек и получение алгоритма синтеза параметрических уравнений кинематических поверхностей с каркасом эквиаффинно подобных кривых.

В настоящей работе изучаются траектории движения точек и конструирование поверхностей на основе эллиптического поворота плоскости.

### **Алгоритм задания кинематической поверхности на основе ЭПП**

Рассмотрим эквиаффинное преобразование плоскости (ЭПП). Зададим параметрические уравнения эквиаффинно преобразуемых линий-преобразов на плоскости  $xOy$  уравнениями (1):

$$\begin{aligned} p &= p(v), \\ q &= q(v), \end{aligned} \tag{1}$$

а эквиаффинно преобразованных линий-образов с заданными значениями параметров ЭПП уравнениями (2):

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(p(v), q(v)), \\ y_1 &= y_1(p(v), q(v)). \end{aligned} \tag{2}$$

Каждое ЭПП имеет дополнительные параметры формы и движения. Функционально задавая их изменение от параметра  $u$ , получим однопараметрическое семейство эквиаффинно подобных линий на плоскости  $x'Oy'$ :

$$\begin{aligned} x_3 &= x_3(p(par(u), v), q(par(u), v)), \\ y_3 &= y_3(p(par(u), v), q(par(u), v)). \end{aligned} \tag{3}$$

Заметим, что семейство (3) в общем случае может не содержать ни линий (1), ни линий (2), однако все линии будут эквиаффинно подобны между собой и линиям (1) и (2).

---

Задавая движение плоскости  $x'Oy'$  вдоль линии  $l(u)$ , можно получить разнообразные типы кинематических поверхностей, главным свойством которых будет являться постоянство площади сечения в плоскости  $x'Oy'$ :

$$\begin{aligned}x &= x(u, v, x_s(u, v), y_s(u, v)), \\y &= y(u, v, x_s(u, v), y_s(u, v)), \\z &= z(u, v, x_s(u, v), y_s(u, v)).\end{aligned}\tag{4}$$

В качестве уравнений (1) может использоваться совокупность линий, представляющая собой замкнутый контур (полилиния).

Исследование плоской траектории движения точки в поле (3) является важной задачей для дальнейшего формирования поверхности, так как совокупность траектории движения точки в плоскости с траекторией движения самой плоскости будет задавать конечное уравнение движения точки в пространстве.

### **Однопараметрические семейства эквиаффинно подобных кривых при эллиптическом повороте плоскости**

Эллиптический поворот представляет собой сложное преобразование [4, 5]: сжатие/растяжение точки вдоль оси  $Oy'$  с коэффициентом  $s$ , поворот точки на заданный угол  $\varphi$ , растяжение/сжатие точки вдоль оси  $Oy'$  с коэффициентом  $1/s$ . Параметрические уравнения эллиптического поворота (2) рассмотрены в [6].

Уравнения однопараметрического семейства эквиаффинно подобных кривых на плоскости при эллиптическом повороте имеют вид:

$$\begin{aligned}x_s &= p(v)\cos(\varphi(u)) - q(v)s(u)\sin(\varphi(u)), \\y_s &= p(v)\frac{1}{s(u)}\sin(\varphi(u)) - q(v)\cos(\varphi(u)).\end{aligned}\tag{5}$$

Рассмотрим траектории движения точки при  $v = v_0 = const$  (обозначим  $p(v_0) = m$ ,  $q(v_0) = n$ ). Тогда уравнения (5) примут вид:

$$\begin{aligned}x_T &= m \cos(\varphi(u)) - ns(u) \sin(\varphi(u)), \\y_T &= m \frac{1}{s(u)} \sin(\varphi(u)) - n \cos(\varphi(u)).\end{aligned}\quad (6)$$

Анализ уравнений (6) показывает, что при  $s(u) = const$  траекторией движения будет являться эллипс с коэффициентом сжатия/растяжения, равным  $s$ , а при  $\varphi(u) = const$  траектория представляет собой гиперболу. Таким образом, функция  $\varphi(u)$  является функцией скорости движения точки на первоначальной траектории при совершении эллиптического поворота, тогда как функция  $s(u)$  является функцией деформации этой траектории.

В практических целях иногда удобно преобразовать вид функций к следующим:

$$\varphi(u) = \varphi_1(u), \quad s(u) = sf_2(u),\quad (7)$$

для получения линий в определенных сечениях с заданными параметрами эллиптического поворота плоскости.

После преобразований (7) уравнения однопараметрического семейства эквивалентно подобных кривых на плоскости (5) запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned}x_s &= p(v) \cos(\varphi_1(u)) - q(v) sf_2(u) \sin(\varphi_1(u)), \\y_s &= p(v) \frac{1}{sf_2(u)} \sin(\varphi_1(u)) - q(v) \cos(\varphi_1(u)).\end{aligned}\quad (8)$$

Ограничения на параметры уравнений (8):  $s \neq 0, f_2(u) \neq 0$ .

Анализ уравнений (8) показывает:

1. Все кривые (2) являются центральными при условии, что линии (1) заданы каноническими уравнениями без смещения геометрического центра относительно начала координат системы  $x'Oy'$ . В противном случае траектория смещения геометрического центра задается уравнениями (9):

$$\begin{aligned}x_{ци} &= x_0 \cos(\varphi_1(u)) - y_0 sf_2(u) \sin(\varphi_1(u)), \\y_{ци} &= x_0 \frac{1}{sf_2(u)} \sin(\varphi_1(u)) - y_0 \cos(\varphi_1(u)).\end{aligned}\quad (9)$$

2. Для получения линии-прообраза (1) при значении параметра  $u = u_0$  достаточно соблюдения условия (10):

$$f_1(u_0) = \frac{2\pi k}{\varphi}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (10)$$

Задание на этом этапе периодических функций дает возможность задавать периодические и псевдопериодические поверхности (под *псевдопериодическими* поверхностями будем понимать такие поверхности, которые через регулярный промежуток  $\Delta u$  в сечении  $u = u_0$  будут иметь линию (1), но в целом отсеки поверхности не будут тождественны друг другу).

3. Для получения линии-образа (2) при значении параметра  $u = u_0$  необходимо и достаточно, чтобы  $f_1(u_0) = 1, f_2(u_0) = 1$ .

На рис. 1 и рис. 2 показаны примеры плоских однопараметрических семейств (8) с траекторией движения произвольной точки. В качестве линий-прообразов (1) на рис. 1 использованы окружности, а на рис. 2 – замкнутый контур, представляющий собой букву «Г», высота которой равна 10 единиц, длина верхней полки – 6 единиц, толщина – 1 единица. Заметим, что в качестве образующей линии можно взять произвольный замкнутый контур. Параметры поля (5) следующие:  $s = 0.5, \varphi = \pi/3$ . Для преобразования контура «Г» используются линейные функции (7).

---

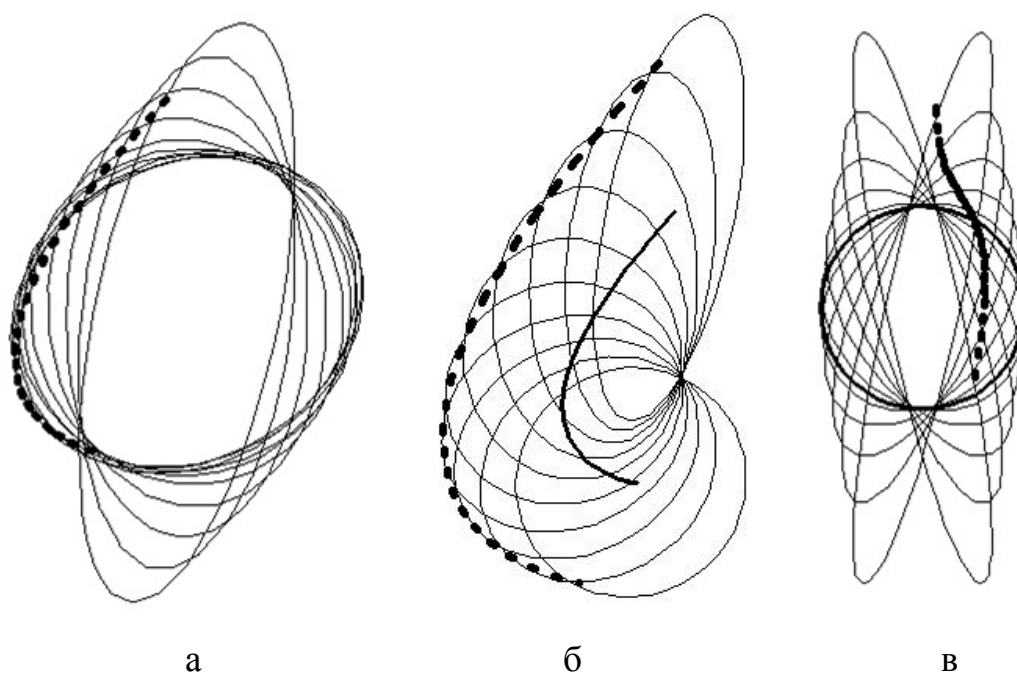


Рис. 1. Примеры однопараметрических семейств (8): а)  $f_1=f_2=u, u=1..2$ ; б)  $f_1=f_2=u, x_0=1, y_0=2, u=1..2$ ; в)  $f_1=\sin u, f_2=\cos u, u=-1..1$

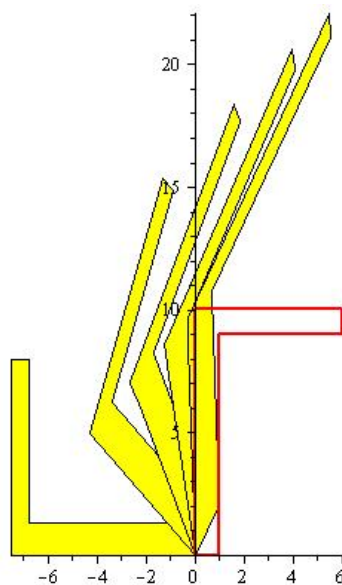


Рис. 2. – Пример однопараметрических семейств (8) с контуром-полилинией

На рис. 1а приведен пример, когда линия-прообраз (1) не входит в семейство (3), на рис. 1б – траектория смещения центра эквиаффинно подобных линий при задании смещения центра в уравнении (1), на рис. 1в –

семейство (3) с центральными кривыми и входящей в семейство линией (1). Пунктирными линиями обозначены траектории произвольных точек.

На рисунке 2 видно, что линия-прообраз (1), обозначенная красным контуром, не входит в семейство (3). Фигура вращается вокруг точки (0, 0). Расчет площади каждого полигона по формуле Гаусса показал, что площади фигур действительно остаются неизменными и равными 15 ед.<sup>2</sup>.

### **Синтез параметрических уравнений кинематических поверхностей с эквиаффинными сечениями на основе эллиптического поворота плоскости**

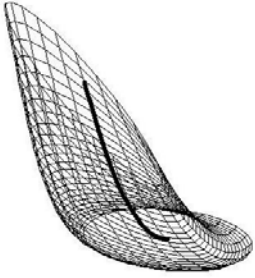
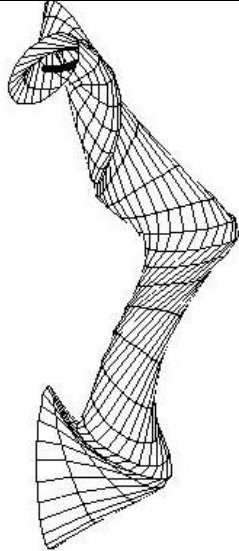
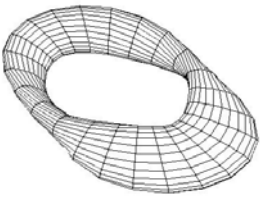
Для синтеза уравнений (4) следует воспользоваться известными методами формообразованию кинематических поверхностей [7, 8, 9, 10].

Таким образом, для формирования параметрических уравнений (4) со свойствами эквиаффинности сечений необходимо выполнить следующие действия:

1. Задать замкнутую линию-прообраз (1) с учетом геометрического центра линии.
2. Подобрать тип функциональных зависимостей  $f_1$ ,  $f_2$  для изменения параметров эллиптического поворота, то есть задать однопараметрическое семейство (5)/(8).
3. Задать тип кинематической поверхности и определить закон движения плоскости инциденции кривой для синтеза уравнений (4).

В таблице 1 представлены примеры некоторых кинематических поверхностей (4) с сечениями (5)/(8).

Таблица 1 – Примеры поверхностей (4) на основе ЭПП

№ п/п	Тип поверхности (4)	Кривая-прообраз (1)	Направляющая линия	Значение параметров	Изображение поверхности (4)
1	С плоскостью параллелизма $\vec{n}(A, B, C)$	Окружность	Парабола	$A=1,$ $B=-3,$ $C=-4,$ $f_1=\sin u,$ $f_2=\cos u,$ $s=0.5, \varphi=\pi/3,$ $R=1,$ $v=0..2\pi,$ $u=0..1$	
2	Винтообразная с нормальной плоскостью сечения	Окружность	Винтообразная с направляющей прямой цилиндрической поверхностью, в основании которой лежит астроида	$a=4,$ $b=5,$ $f_1=u,$ $f_2=u,$ $s=0.5, \varphi=\pi/3,$ $R=2,$ $v=0..2\pi,$ $u= \pi/6..11\pi/6$	
3	Вращения	Окружность	Эллипс	$a=6,$ $b=9,$ $r=1,$ $f_1=\sin u,$ $f_2=3\pi-u,$ $s=0.5, \varphi=\pi/3,$ $v=0..2\pi,$ $u=0..2\pi$	

### Литература

1. Кокарева Я.А. Конструирование каналовых поверхностей с переменной образующей и плоскостью параллелизма на основе эквивалентных



преобразований плоскости // Геометрия и графика. 2017. Т. 5. № 1. С. 12-20. DOI: 10.12737/25119.

2. Кокарева Я.А. Линейчатая поверхность эквиаффинных сечений // Инженерный вестник Дона. 2015. № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2015/3355.

3. Кокарева Я.А. Поверхности конгруэнции эквиаффинных образов окружности // Инженерный вестник Дона. 2016. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2016/3863.

4. Nomizu K., Sasaki T. Affine Differential Geometry // Cambridge University Press, 1994. 268 p.

5. Графский О. А. Виды аффинных преобразований и их композиции // Геометрия и графика. 2016. Т. 4. № 3. С. 11-16. DOI: 10.12737/21529.

6. Кокарева Я. А. Аналітичні та комп'ютерні моделі поверхонь конгруенцій першого порядку прямих: дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. Макіївка, 2011. 203 с.

7. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование. М.: Издательство Физико-математической литературы. 2002. 472 с.

8. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей. М.: Либроком, 2010. 560 с.

9. Сальков Н.А. Параметрическая геометрия в геометрическом моделировании // Геометрия и графика. 2014. № 3. С. 7-13. DOI: 10.12737/6519.

10. Farin G. Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide. Academic Press. 1992. 473 p.

### References

1. Kokareva Ya. A. Geometrija i grafika. 2017. V. 5. № 1. pp. 12-20. DOI: 10.12737/25119.

---



2. Kokareva Ya. A. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2015, № 4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2015/3355](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2015/3355).
3. Kokareva Ya. A. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2016, № 4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2016/3863](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2016/3863).
4. Nomizu K., Sasaki T. Affine Differential Geometry. Cambridge University Press, 1994. 268 p.
5. Grafskij O.A. Geometrija i grafika. 2016. V. 4. I. 3. pp. 11-16. DOI: 10.12737/21529.
6. Kokareva Ya. A. Analitichni ta komp'juterni modeli poverhon' kongruencij pershogo porjadku prjamih [Analytic and computer aided modeling of surfaces of first order linear congruences]: dis. ... kand. tehn. nauk: 05.01.01. Makiyvka, 2011. 203 p.
7. Golovanov N. N. Geometricheskoe modelirovanie [Geometric modeling]. Moscow/ Fizmatlit Publ. 2002. 472 p.
8. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Enciklopedija analiticheskikh poverhnostej [Encyclopedia of analytical surfaces]. Moscow. Librokom Publ. 2010, 560 p.
9. Sal'kov N. Geometrija i grafika. 2014. V. 2. I. 3. pp. 7-13. DOI: 10.12737/6519.
10. Farin G. Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide. Academic Press. 1992. 473 p.