Применение энергетического метода к расчету двухфазного тела

Т.В. Мальцева

Тюменский индустриальный университет, г. Тюмень

Аннотация: Напряженно-деформированное состояние двухфазного тела под действием нагрузки описывается с помощью системы дифференциальных уравнений в частных производных (уравнений Ламе), аналитическое решение которой можно получить для узкого класса задач. Для применения одного из вариационных методов к решению обобщенной системы Ламе записывается функционал на основе потенциальной энергии деформаций, что позволяет расширить спектр задач по исследованию механических процессов в грунтовых основаниях под инженерными сооружениями.
Ключевые слова: двухфазное тело, водонасыщенное грунтовое основание, потенциальная энергия двухфазного тела, напряженно-деформированное состояние.

Экспериментальные исследования по повышению несущей способности водонасыщенных грунтов с помощью различных конструктивных решений [1-3], связанных с применением геосинтетических материалов, и других мероприятий [4,5] позволяют оценить прочность грунтового основания [6]. Однако проведение натурных экспериментов достаточно ресурсозатратное исследование и не дает прогноза напряженно-деформированного состояния водонасыщенных оснований для обеспечения безопасности инженерных объектов. Численное моделирования позволяет решить эту задачу.

Для расчета водонасыщенных грунтов в рамках кинематической модели была построена система обобщенных дифференциальных уравнений Ламе. Известными уравнениями Ламе в конце прошлого века грунт моделировался как упругое однофазное тело без учета влияния поровой воды. Обобщенные уравнения Ламе позволяют учесть двухфазность грунта (скелет грунта + поровая вода) с помощью дополнительных слагаемых, не изменяющих эллиптический тип уравнений [7]. Одним из вариационных методов решения этой системы уравнений является метод на основе выражения для потенциальной энергии деформаций двухфазного тела. С помощью энергетического метода задача об интегрировании системы уравнений сводится к эквивалентной вариационной задаче об отыскании минимума функции. Математическая модель напряженно-деформированного состояния двухфазного основания в стабилизированном состоянии построена на двух гипотезах [7]: 1. гипотезе раздвоения плоских сечений; 2) гипотезе пропорциональности перепада поровых давлений и перемещений частиц поровой воды. В работе была получена система эллиптических уравнений типа Ламе с учетом объемных сил (X_1, X_2, X_3) [7]:

$$-((G+\lambda)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+G\Delta u_i+b_j\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}\delta_{ij}+c_j\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\delta_{ij})=X_i \qquad (1)$$

$$\theta=div\boldsymbol{u}, \qquad b_i=\frac{E_i^l}{\aleph_i^2} \qquad c_i=\frac{E_i^l}{h_i\aleph_i}, \qquad i=1,2,3,$$

с положительными постоянными коэффициентами G, λ, b_i, c_i:

$$G=\frac{E^s}{2(1+\nu)}, \quad \lambda=\frac{\nu E^s}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Введем три оператора $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ и систему уравнений (1) представим в виде

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{K} \qquad \boldsymbol{D}=-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}), \quad \boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3), \quad \boldsymbol{K}=(X_1,X_2,X_3).$$

Вектор-оператор теории упругости (оператор Ламе):

$$\boldsymbol{A}=(G+\lambda)\boldsymbol{grad}\,div+G\boldsymbol{\Delta}.$$

Два других оператора

$$\boldsymbol{B}\left(b_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2},b_2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2},b_3\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right), \qquad \boldsymbol{C}\left(c_1\frac{\partial}{\partial x_1},c_2\frac{\partial}{\partial x_2},c_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right),$$

описывают влияние жидкой фазы (поровой воды) на перемещения твердой.

Для постановки задачи запишем однородные смешанные краевые условия:

$$\boldsymbol{u}\,\big|_{S_1}=0,\qquad \tilde{\boldsymbol{t}}^{(\nu)}\,\big|_{S_2}=0,\qquad \boldsymbol{t}^{(\nu)}=\sum_{i,k=1}^{3}\sigma_{ik}\cos(\nu,x_k)e_i,\qquad \boldsymbol{e}(e_1,e_2,e_3) \tag{2}$$

$\tilde{\boldsymbol{t}}^{(\nu)}$ – вектор напряжений, действующих на поверхность тела с дренирующим покрытием. Показана положительная определенность оператора $\boldsymbol{D}$ [8]:

$$(\boldsymbol{Du},\boldsymbol{u})\geq\gamma\|\boldsymbol{u}\|^2_{L_2},\qquad \gamma^2=C^2+\lambda^2.$$

С – const зависит от механических свойств и области тела *V*. В работе [9] имеются рекомендации по её назначению. $\lambda^2=min\left(\frac{b_1}{c_1},\frac{b_2}{c_2},\frac{b_3}{c_3}\right)$, c_1, c_2, c_3 размеры параллелепипеда, в который заключена область *V*.

Оператор ($-\boldsymbol{C}$) не симметричен при неоднородных краевых условиях:

$$(-\boldsymbol{Cu},\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{u},\boldsymbol{Cv})=\int_V\left(-\sum_{i=1}^{3}c_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}v_i+\sum_{i=1}^{3}c_i\frac{\partial v_i}{\partial x_i}u_i\right)dV=$$

$$=2\int_V c_i\frac{\partial v_i}{\partial x_i}u_i dV-\int_S\sum_{i=1}^{3}c_iu_iv_icos(\nu,x_i)dS.$$

Положим $v=u$, получим квадратичное произведение

$$(-\boldsymbol{Cu},\boldsymbol{u})=-\frac{1}{2}\int_S\boldsymbol{cu}^2cos(\nu,\boldsymbol{x})dS.$$

Энергетическое произведение вводится только для симметричных операторов, поэтому далее будет сделан стандартный переход от неоднородных краевых условий к однородным.

Установим связь энергетического произведения $(\boldsymbol{Du},\boldsymbol{u})$ с потенциальной энергией двухфазного тела. В работе [8] было получено выражение для удельной потенциальной энергии

$$W=W^I+W^{II}+W^{III},$$

$$W^I=\frac{1}{2}c\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2\right)+\lambda\left(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1\right)+\frac{1}{4}(c-\lambda)\left(\varepsilon_{12}^2+\varepsilon_{23}^2+\varepsilon_{31}^2\right),$$

$$W^{II}=\frac{1}{2}\left(a_1\varepsilon_1^2+a_2\varepsilon_2^2+a_3\varepsilon_3^2\right),\qquad W^{III}=-b_1\varepsilon_1u_1-b_2\varepsilon_2u_2-b_3\varepsilon_3u_3,$$

где постоянные $c=\dfrac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, λ- характеризуют механические свойства среды, $\varepsilon_i,\varepsilon_{ij}$- относительные линейные и угловые деформации соответственно,
W^{II} и W^{III} - удельная потенциальная энергия жидкой фазы.

Первое слагаемое в энергетическом произведении $(\boldsymbol{Du},\boldsymbol{u})$

$$(-\boldsymbol{Au},\boldsymbol{u})=-\int_V \boldsymbol{Au}\cdot\boldsymbol{u}dV=2\int_V W^I dV-\int_S \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}^{(\nu)}dS,$$

есть объемный интеграл W^I из удельной потенциальной энергии [9], **ν** - внешняя нормаль к поверхности S.

Скалярное произведение для оператора $\boldsymbol{B}$ является частным случаем энергетического произведения $(-\boldsymbol{Au},\boldsymbol{u})$:

$$(-\boldsymbol{Bu},\boldsymbol{u})=2\int_V W_i^{II}dV-\sum_{i=1}^{3}b_i\int_S\left(u_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\cos(\nu,x_i)dS\right).$$

Граничное условие для вектора напряжений двухфазного тела будет отличаться от граничного условия однофазного тела

$$\int_S \boldsymbol{ut}^{(\nu)}dS+\sum_{i=1}^{3}a_i\int_S\left(u_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\cos(\boldsymbol{\nu},x_i)\right)dS=\int_S \boldsymbol{u}\cdot\tilde{\boldsymbol{t}}^{(\nu)}dS,$$

$$\tilde{\boldsymbol{t}}^{(\nu)}=\sum_{i,k=1}^{3}\left(\sigma_{ik}+a_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)\cos(\nu,x_k)e_i=\sum_{i,k=1,k\neq i}^{3}\left((2G+a_i)\varepsilon_i+\lambda\varepsilon_{ik}+\sigma_{ik}\right)\cos(\nu,x_k)e_i.$$

Для оператора $\boldsymbol{C}$ имеем:

$$(-\boldsymbol{Cu},\boldsymbol{u})=-\int_V \boldsymbol{Cu}\cdot\boldsymbol{u}dV=-\int_V\left(c_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}u_1+c_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}u_2+c_3\frac{\partial u_3}{\partial x_3}u_3\right)dV=$$

$$= \int_V W^{III} dV = -\frac{1}{2}\int_S [c_1 u_1^2 cos(\nu, x_1) + c_2 u_2^2 cos(\nu, x_2) + +c_3 u_3^2 cos(\nu, x_3)] dS$$

. (3)

Поскольку $cos(\nu, x_1) = 0$, $cos(\nu, x_2) = 0$, $cos(\nu, x_3) = -1$, выражение (3) больше нуля.

Согласно методике работы [11] рассмотрим энергетический метод при неоднородных граничных условиях. Пусть вектор-функция $\boldsymbol{\psi}$ удовлетворяет условиям:

$$\boldsymbol{u}\,\big|_{S_1} = 0, \quad \tilde{\boldsymbol{t}}^{(\nu)}\,\big|_{S_2} = \boldsymbol{q}(x_1, x_2). \tag{4}$$

Полагая $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{v}$, новая вектор-функция $\boldsymbol{v}$ будет удовлетворять дифференциальному уравнению с правой частью $\boldsymbol{f_1} = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{D\psi}$:

$$\boldsymbol{Dv} = \boldsymbol{f}_1,$$

и граничным условиям (2), которые являются однородными.

Решение уравнения при однородных краевых условиях эквивалентно определению минимума функционала:

$$F(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{Dv}, \boldsymbol{v}) - 2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{f_1}). \tag{5}$$

Запишем окончательный вариант функционала для случая неоднородных граничных условий:

$$\Phi(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{Du}, \boldsymbol{u}) - 2\int_V \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{f} dV + \int_S N(\boldsymbol{u}) dS = 2\int_V \left(W^I(\boldsymbol{u}) + W^{II}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{f}\right) dV -$$
$$- 2\int_{S_2} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{q} dS + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} b_i \int_{S_2} u_i^2 cos(\nu, x_i) dS, \qquad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{C\psi} \tag{7}$$

Для сравнения приведем соответствующий функционал однофазного упругого тела:

$$F(\boldsymbol{u}) = 2\int_V \left(W^I(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{K}\right) dV - \int_S \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}^{(\nu)} dS. \tag{8}$$

Дополнительные новые слагаемые в функционале (7) показывают отличия от известного в теории упругости выражения (8). Таким образом, вариационные методы математической физики [10] можно применять при решении задач, в которых водонасыщенные грунты моделируются в виде двухфазной системы (скелет грунта + поровая вода) и напряженно-деформированное состояние их описывается системой обобщенных уравнений Ламе. Отыскание минимума функционала в математической физике является известной задачей.

Литература

1. Usmanov R., Mrdak I., Vatin N., Murgul V. Reinforced soil beds on weak soils // Applied Mechanics and Materials, 2014. – pp. 932-935.
2. Kudriavtcev S., Kazharsky A., Maleev D., Tsvigunov D., Trapeznikov V. Research into vertical axial elements in seasonally frozen grounds // MATEC Web of Conferences 2018.- p. 03043.
3. Kudriavtcev S., Bugunov S., Kotenko Z., Pogulyaeva E. Investigation of light embankment on weak soils // MATEC Web of Conferences 2018.- p. 03044.
4. Кудрявцев С.А., Вальцева Т.Ю., Гончарова Е.Д. Разработка конструкций для укрепления оползневого массива грунта на участке автомобильной догори «Амур» с использованием современных геотекстильных материалов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Строительство и архитектура. 2016. Т.7. № 4. - С.111-122.
5. Сафарян В.С., Бай В.Ф., Коркишко А.Н., Чухлатый М.С. Отдельно стоящие фундаменты с неплоской подошвой // Инженерный вестник Дона. 2019. №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N3y2019/5870
6. Тиратурян А.Н., Ольховой С.А. Оценка деградации прочности нежестких дорожных конструкций на основе натурных измерений на участке автомобильной дороги М4 «Дон» п. Тарасовский // Инженерный вестник Дона. 2017. №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2017/4160

7. Мальцева Т.В., Трефилина Е.Р. Моделирование двухфазного тела с учетом несущей способности жидкой фазы // Математическое моделирование. 2004. Т. 16. № 11. - С. 47-57.

8. Мальцева Т.В. Математическая теория водонасыщенного грунта. Тюмень: Вектор Бук. 2012. 240 с.

9. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике: пер. с англ. М.: Мир. 1985. 590 с.

10. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М. 1957. 476 с.

11. Ионов В.Н., Огибалов П.М. Прочность пространственных элементов конструкций. М.: Высшая школа. 1972. 751 с.

References

1. Usmanov R., Mrdak I., Vatin N., Murgul V. Applied Mechanics and Materials, 2014. pp. 932-935.

2. Kudriavtcev S., Kazharsky A., Maleev D., Tsvigunov D., Trapeznikov V. MATEC Web of Conferences, 2018. p. 03043.

3. Kudriavtcev S., Bugunov S., Kotenko Z., Pogulyaeva E. MATEC Web of Conferences, 2018. p. 03044.

4. Kudrjavcev S.A., Val'ceva T.Ju., Goncharova E.D. Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politehnicheskogo universiteta. Stroitel'stvo i arhitektura. 2016. T. 7. № 4. C.111-122.

5. Safarjan V.S., Baj V.F., Korkishko A.N., Chuhlatyj M.S. Inzhenernyj vestnik Dona. 2019. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N3y2019/5870

6. Tiraturjan A.N., Ol'hovoj S.A. Inzhenernyj vestnik Dona. 2017. № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2017/4160

7. Mal'ceva T.V., Trefilina E.R. Matematicheskoe modelirovanie. 2004. T. 16. № 11. pp.47-57.

8. Mal'ceva T.V. Matematicheskaja teorija vodonasyshhennogo grunta [Mathematical theory of water-saturated soil]. Tyumen: Vektor Buk. 2012. 240 p.

9. Rektoris K. Variacionnye metody v matematicheskoj fizike i tehnike [Variational Methods in Mathematical Physics and Engineering]: Per. s angl. M.: Mir. 1985. 590 p.

10. Mihlin S.G. Variacionnye metody v matematicheskoj fizike. [Variational Methods in Mathematical Physics]. M. 1957. 476 p.

11. Ionov V.N., Ogibalov P.M. Prochnost' prostranstvennyh jelementov konstrukcij. [Strength of spatial structural elements]. M.: Vysshaja shkola. 1972.