Нелинейная задача теплопроводности для радиационно-теплового экрана реактора АЭС

Э.К. Агаханов[1], Р.М. Курачев[1], А.С. Чепурненко[2], И.И. Кулинич[3]

[1]Дагестанский государственный технический университет
[2]Ростовский государственный строительный университет
[3]Северо-Кавказский федеральный университет

Аннотация: Рассмотрена стационарная задача теплопроводности для радиационно-теплового экрана реактора АЭС с учетом внутренних источников тепловыделения. Учитывалась зависимость коэффициента теплопроводности бетона от температуры, что обуславливало нелинейность задачи. Решение выполнялось при помощи метода конечных элементов в сочетании с методом последовательных приближений. Установлено, что учет зависимости коэффициента теплопроводности от температуры приводит к незначительному (2.5%) повышению температуры в толще.
Ключевые слова: теплопроводность, метод конечных элементов, стационарное температурное поле, радиационно-тепловой экран, толстостенные цилиндры.

Во многих работах [1-8] рассматриваются задачи расчета толстостенных цилиндров и сфер с учетом силовых и температурных воздействий, когда неоднородность материала носит одномерный (радиальный) характер. В ряде практических задач источник тепла, находящийся внутри цилиндрической оболочки, можно рассматривать как точечный. При этом температурное поле остается осесимметричным, но возникает двумерная неоднородность.

Рассмотрим задачу определения температурного поля для радиационно-теплового экрана реактора АЭС. Расчетная схема представлена на рисунке 1.

Такая конструкция, также называемая «сухой защитой», применяется для уменьшения тепловых и радиационных воздействий, возникающих при работе реактора. В конструктивном плане «сухая защита» является жестко закрепленной в основании толстостенной цилиндрической оболочкой, изготовленной из жаростойкого бетона [2,5,9].

В работах [2,5] задача теплопроводности решается вариационно-разностным методом. Однако этот метод имеет недостаток, связанный с тем, что при определении напряженно-деформированного состояния решение также должно выполняться вариационно-разностным методом, либо при решении методом конечных элементов сетка КЭ должна совпадать с разностной сеткой.

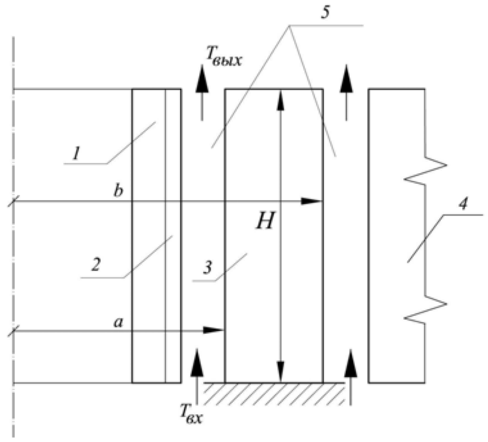

Рис. 1. – Расчетная схема: 1 – корпус реактора; 2 – теплоизоляция; 3 – «сухая защита»; 4 – биологическая защита; 5 – каналы охлаждения

Кроме того, в работах [2,5] не учитывается зависимость коэффициента теплопроводности и коэффициента линейного температурного расширения от температуры.

Рассмотрим решение осесимметричной задачи теплопроводности с учетом зависимости коэффициента теплопроводности от температуры при помощи метода конечных элементов.

В случае стационарного температурного поля уравнение теплопроводности для осесимметричной задачи имеет вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right]=-W(r,z), \quad (1)$$

где $\lambda(T)$ – коэффициент теплопроводности, $W(r,z)$ – плотность внутренних источников тепловыделений.

Для функции $W(r,z)$ используется следующая зависимость, приведенная в работах [2,5]:

$$W(r,z)=W_0+W_1\exp[-\delta(r-a)]\sin\frac{\pi z}{H}, \quad (2)$$

где W_0, W_1, δ – эмпирические параметры.

На верхней и боковых поверхностях цилиндра граничные условия принимаются в виде:

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial n}+h(T-T_\infty)=0, \quad (3)$$

где h – коэффициент теплоотдачи, T_∞ – температура окружающей среды, n – нормаль к поверхности.

Для нижней поверхности считаем, что масса основания намного больше массы цилиндра и температура на границе является заданной функцией:

$T=T_0(r)$ при $z=0$. (4)

Решению уравнения (1) с граничными условиями (3) и (4) соответствует минимум следующего функционала:

$$\chi=\int_V\frac{1}{2}\left[\lambda\left\{\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right\}-2WT\right]dV+\frac{1}{2}h\int_S(T-T_\infty)^2dS. \quad (5)$$

Будем использовать треугольный симплекс-элемент, представленный на рис. 2.

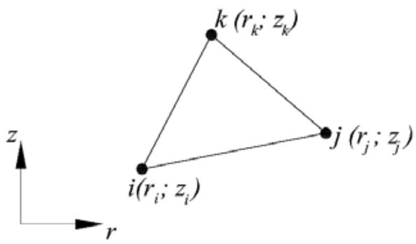

Рис. 2. – Используемый конечный элемент

Для температуры в пределах элемента принимается следующая аппроксимация:

$$T = N_i T_i + N_j T_j + N_k T_k = \{N_i \quad N_j \quad N_k\}\{T_i \quad T_j \quad T_k\}^T = \{N_i \quad N_j \quad N_k\}\{T\},$$

где N_i, N_j, N_k – функции формы, T_i, T_j, T_k – узловые значения температуры.

$$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i r + c_i z), \qquad (6)$$

где A – площадь элемента, $a_i = r_j z_k - r_k z_j$, $b_i = z_j - z_k$, $c_i = r_k - r_j$.

Первый интеграл в (5) с учетом аппроксимации (6) запишется в виде:

$$\int_V \frac{1}{2}\left[\lambda\left\{\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right\} - 2WT\right]dV = \frac{1}{2}\lambda \cdot \frac{1}{4A^2}\{T\}^T\left(\begin{Bmatrix} b_i \\ b_j \\ b_k \end{Bmatrix}\{b_i \quad b_j \quad b_k\} + \right.$$

$$\left. + \begin{Bmatrix} c_i \\ c_j \\ c_k \end{Bmatrix}\{c_i \quad c_j \quad c_k\}\right)\{T\}\int_V dV - W\int_V TdV.$$

$$\int_V TdV = \{T\}^T \int_V \{N_i \quad N_j \quad N_k\}^T dV = \{T\}^T \frac{\pi A}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} r_i \\ r_j \\ r_k \end{Bmatrix}.$$

Интеграл по поверхности в (5) вычисляется следующим образом:

$$\int_S (T - T_\infty)^2 dS = \int_S T^2 dS - 2T_\infty \int_S TdS + T_\infty^2 S.$$

$$\int_S T^2 dS = \{T\}^T 2\pi \int_L \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix}\{N_i \quad N_j \quad N_k\}dL\{T\}^T = \{T\}^T 2\pi[C]\{T\}, \qquad (7)$$

где L – длина ребра, попавшего на границу сред.

Интеграл (7) вычисляется только для ребер, попавших на границу между оболочкой и окружающей средой. Если граница проходит по ребру, соединяющему узлы i и j, то матрица $[C]$ имеет вид:

$$[C_{ij}] = \frac{L}{12}\begin{bmatrix} 3r_i + r_j & r_i + r_j & 0 \\ r_i + r_j & r_i + 3r_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если граница раздела сред совпадает с ребром ik или jk, то матрица $[C]$ записывается в виде:

$$[C_{ik}] = \frac{L}{12}\begin{bmatrix} 3r_i + r_k & 0 & r_i + r_k \\ 0 & 0 & 0 \\ r_i + r_k & 0 & r_i + 3r_k \end{bmatrix}; \quad [C_{jk}] = \frac{L}{12}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3r_j + r_k & r_j + r_k \\ 0 & r_j + r_k & r_j + 3r_k \end{bmatrix}.$$

$$\int_S TdS = \int_L \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} 2\pi r dL = 2\pi \int_L \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} (N_i r_i + N_j r_j + N_k r_k) dL = 2\pi\{f\}.$$

Вектор $\{f\}$ для ребер ij, ik, jk имеет вид:

$$\{f_{ij}\} = \frac{L}{6}\begin{Bmatrix} 2r_i + r_j \\ r_i + 2r_j \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \{f_{ik}\} = \frac{L}{6}\begin{Bmatrix} 2r_i + r_k \\ 0 \\ r_i + 2r_k \end{Bmatrix}; \quad \{f_{jk}\} = \frac{L}{6}\begin{Bmatrix} 0 \\ 2r_j + r_k \\ r_j + 2r_k \end{Bmatrix}.$$

Минимизируя функционал χ, получим следующую систему уравнений:

$$[K]\{T\} = \{P\},$$

где $[K]$ – матрица теплопроводности, $\{P\}$ – вектор нагрузки.

$$[K] = \frac{\lambda}{4A}\left(\begin{Bmatrix} b_i \\ b_j \\ b_k \end{Bmatrix}\{b_i \quad b_j \quad b_k\} + \begin{Bmatrix} c_i \\ c_j \\ c_k \end{Bmatrix}\{c_i \quad c_j \quad c_k\}\right) 2\pi\bar{r} + 2\pi h[C],$$

где $\bar{r} = (r_i + r_j + r_k)/3$.

$$\{P\} = \frac{W\pi A}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} r_i \\ r_j \\ r_k \end{Bmatrix} + 2\pi h T_\infty \{f\}.$$

Поскольку коэффициент теплопроводности зависит от температуры, то задача решается методом последовательных приближений. В первом приближении принимаем, а затем корректируем λ для каждого элемента по формуле: $\lambda_i = (\lambda_{i-1} + \lambda(T_{i-1}))/2$. Критерием выхода из цикла является условие

$$\frac{(\max(T_i) - \max(T_{i-1}))}{\max(T_i)} \cdot 100\% < 0.1\%.$$

Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры для жаростойкого бетона, представленная в действующих строительных нормах [10], приведена в таблице 1.

Табл. 1. – Коэффициент теплопроводности жаростойкого бетона при различных температурах

T, °C	50	100	300	500	700
λ, Вт/(м·°C)	1,51	1,37	1,39	1,51	1,62

Представленная в табл. 1 зависимость при $50\ °C \le T \le 700\ °C$ аппроксимируется следующим образом:

$$\lambda(T) = \sum_{i=0}^{3} \beta_i \left(\frac{T-50}{100}\right)^i,$$

где T – температура в градусах Цельсия; $\beta_0 = 1{,}51$, $\beta_1 = -0{,}2136$, $\beta_2 = 0{,}0774$, $\beta_3 = -0{,}0065$ – коэффициенты, полученные при помощи метода наименьших квадратов.

При $T \le 50\ °C$ примем, что $\lambda = const = 1{,}51$ Вт/(м·°C). Вычисления выполнялись при следующих исходных данных: коэффициент теплоотдачи и средняя температура окружающей среды вблизи внутренней поверхности цилиндра (при $r = a$): $h_a = 5$ Вт/(м^2·°C), $T_{\infty,a} = 50$ °C; на внешней поверхности при $r = b$: h_b = 35 Вт/(м^2·°С), $T_{\infty,b}$ = 20 °С; на верхнем торце при z = H: h_H = 20 Вт/(м^2·°С), $T_{\infty,H}$ = 35 °С; a = 2 м, b = 3 м, h = 3 м.

Температура в основании цилиндра определялась следующим образом:

$$T_0(r) = T_{A0}\frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)} + T_{B0}\frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)},$$

где T_{A0} = 72 °С, T_{B0} = 28 °С.

Эмпирические коэффициенты: $W_0 = 6{,}7\cdot10^{-4}$ Вт/м^3 , $W_1 = 1{,}6\cdot10^{-3}$ Вт/м^3, $\delta = 10$.

На рисунке 3 представлен график изменения температуры в зависимости от r и z. Закрашенной поверхности соответствует решение при $\lambda = const$, сетчатой – при $\lambda \neq const$. Учет зависимости коэффициента теплопроводности от температуры приводит к незначительному (на 2.5%) повышению температуры в толще конструкции. Распределение коэффициента теплопроводности в зависимости от r и z представлено на рисунке 4.

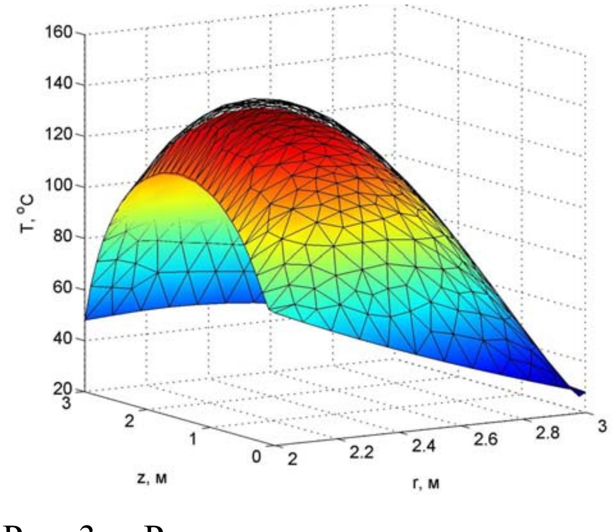

Рис. 3. – Распределение температуры в зависимости от r и z

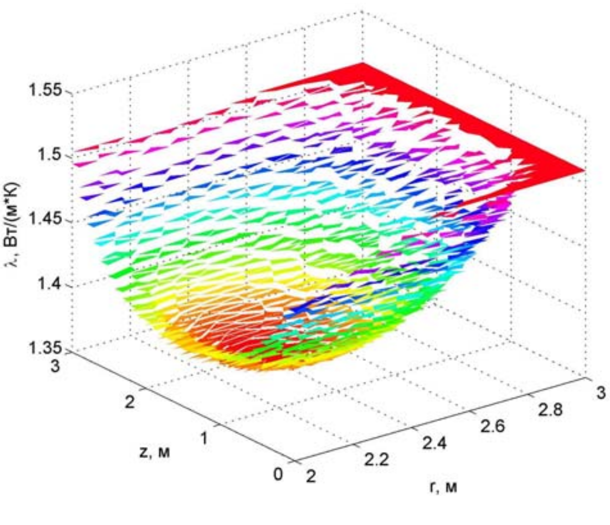

Рис. 4. – Изменение коэффициента теплопроводности $\lambda(r,z)$

Литература

1. Дудник А.Е., Чепурненко А.С., Никора Н.И., Денего А.С. Плоское деформированное состояние полимерного цилиндра в условиях термовязкоупругости // Инженерный Вестник Дона: электронный журнал. 2015. №2 (часть 2). URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/3063

2. Андреев В.И. Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел: монография. М.: Издательство АСВ, 2002. 288 с.

3. Языев Б.М., Литвинов С.В., Козельский Ю.Ф. Плоская деформация элементов цилиндрических конструкций под действием физических полей // Инженерный Вестник Дона: электронный журнал. 2013. №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1616

4. Литвинов С.В., Козельский Ю.Ф., Языев Б.М. Расчёт цилиндрических тел при воздействии теплового и радиационного нагружений. Инженерный Вестник Дона: электронный журнал. 2012. №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2012/954

5. Смолов А.В. Напряжённо-деформированнное состояние неоднородных упругих цилиндров под действием силовых и температурных нагрузок: дис. канд. техн. наук. М.: 1987. 161 с.

6. Andreev V.I., Chepurnenko A.S., Jazyjev B.M. Model of Equal-stressed Cylinder based on the Mohr Failure Criterion//Advanced Materials Research Vols. 887-888 (2014) pp 869-872. Trans Tech Publications, Switzerland

7. Andreev V.I., Avershyev A.S. Nonstationary Problem Moisture Elasticity for Nonhomogeneous Hollow Thick-Walled Sphere // Advanced Materials Research Advanced Materials Research, Vols. 838-841 (2013), pp. 254-258. Trans Tech Publications, Switzerland

8. Andreev V.I., Avershyev A.S. About Influence of Moisture on Stress State of Soil Taking into Account Inhomogeneity // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2013. №9. pp. 14-20.

9. Дубровский В.Б. Радиационная стойкость строительных материалов. М.: Стройиздат, 1977. 278 с.

10. СП 27.13330.2011. Бетонные и железобетонные конструкции, предназначенные для работы в условиях воздействия повышенных и высоких температур. Актуализированная редакция СНиП 2.03.04-84. М., 2011. 121 с.

References

1. Dudnik A.E., Chepurnenko A.S., Nikora N.I., Denego A.S. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2015. №2 (chast' 2). URL: http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/3063

2. Andreev V.I. Nekotorye zadachi i metody mehaniki neodnorodnyh tel: monografija [Some problems and methods of mechanics of inhomogeneous bodies: monograph]. M.: Izdatel'stvo ASV, 2002. 288 p.

3. Jazyev B.M., Litvinov S.V., Kozel'skij Ju.F. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013. №2. URL: http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1616

4. Litvinov S.V., Kozel'skij Ju.F., Jazyev B.M. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012. №3. URL: http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2012/954

5. Smolov A.V. Naprjazhjonno-deformirovannnoe sostojanie neodnorodnyh uprugih cilindrov pod dejstviem silovyh i temperaturnyh nagruzok: dis. kand. tehn. nauk [Stress-strain state of inhomogeneous elastic cylinders under mechanical and temperature loads: diss. cand. tech. sciences]. M.: 1987. 161 p.

6. Andreev V.I., Chepurnenko A.S., Jazyjev B.M. Model of Equal-stressed Cylinder based on the Mohr Failure Criterion.Advanced Materials Research Vols. 887-888 (2014) pp 869-872. Trans Tech Publications, Switzerland

7. Andreev V.I., Avershyev A.S. Nonstationary Problem Moisture Elasticity for Nonhomogeneous Hollow Thick-Walled Sphere. Advanced Materials Research Advanced Materials Research, Vols. 838-841 (2013), pp. 254-258. Trans Tech Publications, Switzerland

8. Andreev V.I., Avershyev A.S. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2013. №9. pp. 14-20.

9. Dubrovskij V.B. Radiacionnaja stojkost' stroitel'nyh materialov [Radiation strength of building materials]. M.: Strojizdat, 1977. 278 p.

10. SP 27.13330.2011. Betonnye i zhelezobetonnye konstrukcii, prednaznachennye dlja raboty v uslovijah vozdejstvija povyshennyh i vysokih temperature [Concrete and Reinforced Concrete Structures intended for the Service in Elevated and High Temperatures]. Aktualizirovannaja redakcija SNiP 2.03.04-84. M., 2011. 121 p.