

О нейтральном нагружении диска при тепловом и силовом воздействиях

М.А. Артемов, Е.С. Барановский, Г.Г. Бердзенишвили,

Э.И. Семка, Д.Б. Фатхудинов

Воронежский государственный университет

Аннотация: Рассматривается тонкий круговой диск, материал которого проявляет упругие и пластические свойства при тепловом и силовом воздействиях. В центральной части диска поле температур однородное. На границе диска задано давление и постоянная температура. Принимается приближение плоского напряженного состояния. Рассматривается аддитивная форма связи полных, упругих, пластических деформаций и деформаций при свободном тепловом расширении. Упругие деформации выражаются через напряжения согласно закону Гука. Предлагается линейная аппроксимация зависимости предела пластичности от температуры. Показана возможность нейтрального нагружения центральной области диска и его внешней границы. Особо выделяется условие пластичности Треска.

Ключевые слова: математическое моделирование, упругопластическое тело, плоское напряженное состояние, кусочно-линейные условия пластичности, теория пластического течения, термоупругопластичность.

Математическое моделирование состояния дисков и труб, испытывающих различные внешние воздействия, вызывает особый практический интерес в связи с применением в различных технологических процессах, направленных на высокую точность изготовления различных узлов. В этом научном направлении выполнено большое количество исследований [1–17]. Большая часть работ связана с использованием условий пластичности Треска [1–6]. Ряд авторов [7, 8] рассматривает условие пластичности Шмидта–Ишлинского. В некоторых работах рассматриваются кусочно-линейные условия пластичности общего вида, учитывающие пластическую сжимаемость [9, 10]. Использование гладких функций пластичности (например, Мизеса) приводит к построению приближенных аналитических или численных решений [16, 17].

Постановка задачи

В настоящей работе рассматривается задача определения напряженного и деформированного состояния тонкого упругопластического диска, испытывающего тепловое и силовое воздействия. В центральной части кругового диска $0 \leq r \leq a$ температурное поле однородное, на границе диска $r = b$ задана температура $T_b = 0$ и давление p_b . Выбирается

приближение плоского напряженного состояния. Исследуется возможность нейтрального нагружения при изменении величин внешних воздействий.

Основные предположения

Используется линейная аппроксимация зависимости предела пластичности k от температуры, что подходит, например, для хромоникелевых сталей [18]. Зависимости модуля Юнга E и коэффициента линейного теплового расширения α от температуры имеют разнонаправленный характер, поэтому их произведение αE в данной работе считается постоянной величиной. Зависимость других параметров модели от температуры не учитывается.

В качестве масштаба напряжений выбирается k_0 – предел пластичности при начальной температуре, за масштаб длины принимается a – радиус центральной части диска, масштаб температуры равен 1°C . Для безразмерных величин сохраняются обозначения соответствующих размерных величин.

Поле температур

Для несвязной термопластической задачи температурное поле определяется независимо от напряженно-деформируемого состояния. Распределение температуры в диске имеет вид [19]

$$T = T_a f, \quad f = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq a; \\ \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)}, & a \leq r \leq b. \end{cases}$$

Область упругого состояния диска

Пусть весь диск ($a \leq r \leq b$) находится в упругом состоянии. Для определения напряжений имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 \sigma_r) + E \alpha T_a f \right) = 0, \\ \sigma_\varphi = r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r. \end{cases} \quad (1)$$

Решение системы (1) имеет вид [19]

$$\sigma_r = -\frac{\alpha T_a E}{r^2} I_{ar} + A - \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_\varphi = \frac{\alpha T_a E}{r^2} (I_{ar} - r^2 f) + A + \frac{B}{r^2}, \quad I_{ar} = \int_a^r f r dr. \quad (2)$$

Когда заданы граничные условия

$$\sigma_r |_{r=a} = -p_a, \quad \sigma_r |_{r=b} = -p_b,$$

величины A и B вычисляются по формулам:

$$A = \frac{\alpha T_a E}{b^2 - a^2} I_{ab} + \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}, \quad B = \frac{a^2 \alpha T_a E}{b^2 - a^2} I_{ab} + \frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{b^2 - a^2}, \quad I_{ab} = \int_a^b f r dr.$$

Если $a = 0$, то

$$A = \frac{\alpha T_a E}{b^2} I_{0b} - p_b, \quad B = 0, \quad I_{0b} = \int_0^b f r dr \quad (3)$$

Переход диска в упругопластическое состояние

Задача плоского напряженного состояния идеального упругопластического тела в области пластического состояния является статически определимой. Поэтому, если граничные условия не содержат перемещений, то определение напряжений не зависит от деформированного состояния.

Анализ упругого напряженного состояния диска показывает, что в зависимости от величины радиуса диска в процессе нагружения зарождение пластической области может происходить или на границе $r = a$, или на границе $r = b$, или на границах $r = a$ и $r = b$ одновременно.

Будем полагать, что для всех условий пластичности общим является предел пластичности на одноосное растяжение.

В области $0 \leq r \leq a$ реализуется однородное напряженное состояние $\sigma_r = \sigma_\varphi$, поэтому в этой части диска при переходе в пластическое состояние для любого условия пластичности будет выполняться режим

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = -k.$$

Из формул (2), (3) следует, что указанный переход выполняется, если

$$T_a = T_{in} = 2b^2(k_0 - p_b)/(2b^2k_0\xi + \alpha E(b^2 - 2I_{0b})).$$

Для произвольного условия пластичности получить аналитическое выражение для температуры $T_a = T_{ex}$, при которой в пластическое состояние переходит только граница $r = b$, нельзя, поэтому рассмотрим некоторые примеры.

Если давление $p_b = 0$, то для любого условия пластичности на границе $r = b$ напряжения $\sigma_r = 0$, $\sigma_\varphi = k_0$, поэтому

$$T_a = T_{ex} = (b^2k_0)/(2\alpha EI_{0b}).$$

Рассмотрим случай, когда выбирается кусочно-линейное условие пластичности общего вида

$$\begin{cases} \max_{i=1 \div n} \{\alpha_i \sigma_\varphi + \beta_i \sigma_r + \gamma_i \sigma_z\} = k = k_0(1 - \xi T), \\ \sigma_z = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Если на границе $r = b$ давление $p_b \neq 0$ и выполняется режим пластичности, то

$$T_a = T_{ex} = b^2((\alpha_i + \beta_i)p_b + k_0) / \left(2\alpha E \int_0^b r f dr \right).$$

Для условия пластичности Мизеса имеем

$$T_a = T_{ex} = \frac{\left(p_b + \sqrt{4k_0^2 + 3p_b^2} \right) b^2}{2\alpha E \left(a^2 + 2 \int_a^b r f dr \right)}.$$

Когда обжим выбирается не предел пластичности на одноосное растяжение, то алгоритм вычисления величин T_{in} и T_{ex} остается прежним, но формулы для их вычисления будут иными.

Равенство $T_{in} = T_{ex}$ позволяет определить радиус диска $b = b_k$, для которого одновременно на границах $r = a$ и $r = b$ зарождается пластическая область.

На рис. 1 приведены графики T_{ex} и T_{in} до точки их пересечения $b = b_k$ при выборе условия пластичности Треска (сплошная линия), Шмидта–Ишлинского (точечная линия) и Мизеса (пунктирная линия). При выполнении всех численных расчетов выбраны следующие значения безразмерных параметров модели: $k_0 = 1$, $a = 1$, $\alpha E = 0.012$.

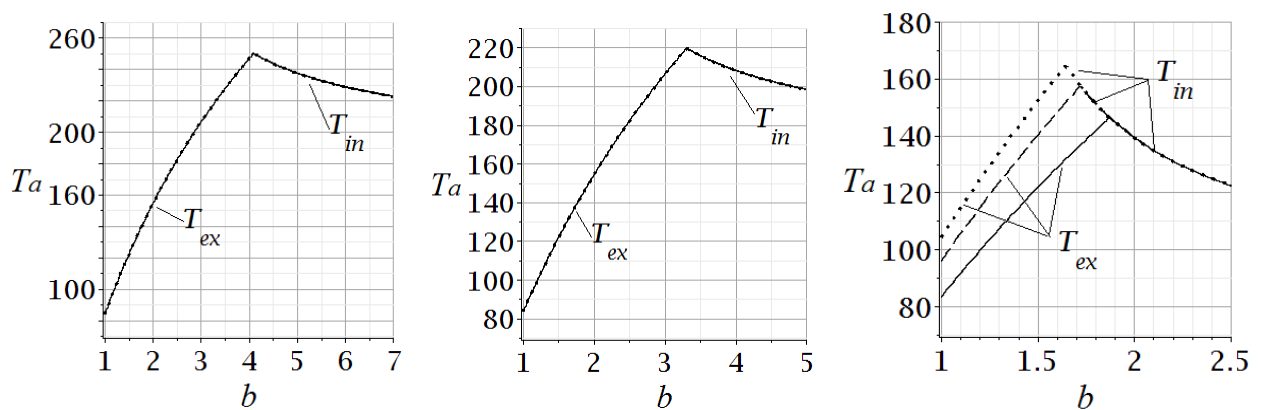


Рис. 1. а) $p_b = 0$, $\xi = 0$; б) $p_b = 0$, $\xi = 0.0008(3)$; в) $p_b = 0.5$, $\xi = 0.0008(3)$

Результаты, представленные на рис. 1, показывают, что

- 1) когда $b \leq b_k$ и $T_a = T_{ex}$, только граница диска $r = b$ переходит в пластическое состояние;
- 2) когда $b_k < b$ и $T_a = T_{in}$, только область $0 \leq r \leq a$ переходит в пластическое состояние;

3) когда $b = b_k$ и $T_a = T_{ex} = T_{in}$, одновременно в пластическое состояние переходит область $0 \leq r \leq a$ и граница диска $r = b$.

Нейтральное нагружение

Нейтральное нагружение в точке тела рассматривается как процесс изменения напряженного состояния, удовлетворяющий условию пластичности, когда приращения пластических деформаций $d\varepsilon^P = \mathbf{0}$. Нагружение возможно за счет изменения внешних воздействий на диск: температуры ядра диска T_a и внешнего давления p_b на границе $r = b$.

Для диска, находящегося в упругом состоянии, напряжения в области $0 \leq r \leq a$ определяются по формулам (2), (3).

Область однородного состояния. Для любого условия пластичности изотропного тела в области $0 \leq r \leq a$ напряжения $\sigma_\varphi = \sigma_r$. При переходе данной области в пластическое состояние имеем $\sigma_r = -k$. Поэтому, учитывая (25), получаем, что параметры, определяющие внешние воздействия, должны удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} (2b^2 k_0 \xi + \alpha E (b^2 - 2I_{0b})) T_a = 2b^2 (k_0 - p_b), \\ b > b_k. \end{cases} \quad (5)$$

Из соотношений ассоциированного закона пластического течения следует, что $e_r^P = e_r^P$. Для упругих деформаций имеем

$$E e_r^e = E e_\varphi^e = -(1 - \nu) k.$$

Для полных деформаций выполнено $e_r = e_\theta$. Получаем, что

$$E e_r^P = E e_r^P = C + (1 - \nu) k - E \alpha T_a.$$

На упругопластической границе $r = a$ имеем $e_r^P = e_r^P = 0$, поэтому

$$C = -(1 - \nu) k + E \alpha T_a.$$

Эти соотношения показывают, что изменение внешних параметров, не нарушающие условия (5), определяют процесс нейтрального нагружения в области $0 \leq r \leq a$.

Внешняя граница. Для условия пластичности (4), когда $a < b < b_k$, при изменении внешних воздействий на границе $r = b$ будет осуществляться нейтральное нагружение, если

$$\begin{cases} 2\alpha E \alpha_i I_{0r} T_a = k_0 + (\alpha_i + \beta_i) p_b b^2, \\ 0 \leq p_b < k_0 (1 - \xi T_a). \end{cases}$$

Рассмотрим условие пластичности Треска. В указанном диапазоне изменения внешнего давления может выполняться только режим

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = k.$$

Поэтому для дисков малого радиуса в данном диапазоне p_b процесс нейтрального нагружения невозможен. Для других условий пластичности процесс нейтрального нагружения точек границы $r = b$ возможен.

Литература

1. Melan E., Parkus H. Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. Wien: Springer, 1953, 107 s.
2. Gamer U. Elastic-Plastic Deformation of a Centrally Heated Disk // Journal of Thermal Stresses. 1985. V. 8, pp. 41–51.
3. Orcan Y., Gamer U. Elastic-Plastic Deformation of a Centrally Heated Cylinder // Acta Mechanica. 1991. V. 90, pp. 61–80.
4. Arslan E., Mack W., Eraslan A. N. The Rotating Elastic-Plastic Hollow Shaft Conveying a Hot Medium // Forschung im Ingenieurwesen. 2010. V. 74, pp. 27–39.
5. Артемов М. А., Барановский Е. С., Бердзенишвили Г. Г., Переяславская И. И. О напряженном состоянии тонкого диска с учетом зависимости предела

текучести от температуры // Инженерный вестник Дона, 2017, № 3
URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4359.

6. Артемов М. А., Барановский Е. С., Бердзенишвили Г. Г., Переяславская И. И. О влиянии зависимости предела текучести от температуры на напряженное состояние тонкого диска // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2017). Сборник трудов X международной конференции. Воронеж: Издательство «Научная книга», 2017. С. 51–55.

7. Dats E., Murashkin E. On Unsteady Heat Effect in Center of the Elastic-Plastic Disk // Lecture Notes in Engineering and Computer Science, “WCE 2016 – World Congress on Engineering 2016”, pp. 69–72.

8. Артемов М. А., Барановский Е. С., Переяславская И. И. Математическое моделирование процесса термопластического деформирования тонкого кругового диска // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании: материалы XIII Международной научной конференции. Саранск: СВМО, 2017. С. 236–247.

9. Артемов М. А., Барановский Е. С., Переяславская И. И. Напряженно-деформированное состояние диска при тепловом воздействии // Современные проблемы механики сплошной среды: тезисы докладов Международной конференции, посвященной памяти академика Л. И. Седова. М.: Матем. институт им. В. А. Стеклова РАН, 2017. С. 33–35.

10. Артемов М. А., Барановский Е. С. Об одном алгоритме решения задач термопластичности // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов XIV Международной научной конференции (с. Цей, 3–8 июля 2017 г.). Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2017. С. 137–138.



11. Полетаев Ю. В. Механизм локального разрушения зоны термического влияния сварных соединений при малоцикловом нагружении // Инженерный вестник Дона, 2011, № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2011/606.

12. Полетаев Ю. В., Полетаев В. Ю. Методика оценки склонности сварных соединений низколегированных сталей к образованию трещин при термической обработке // Инженерный вестник Дона, 2014, № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2583.

13. Артемов М. А., Барановский Е. С. Математическое моделирование пластического состояния тел. Плоская деформация // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2 (24). С. 72–87.

14. Артемов М. А., Барановский Е. С., Якубенко А. П. Альтернативные формы записи кусочно-линейных условий пластичности и их обобщения // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2015. № 1. С. 71–82.

15. Переяславская И. И., Артемов М. А., Барановский Е. С. К вопросу математического моделирования осесимметричного плоско–напряженного состояния сжимаемого упругопластического тела // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 1 (31). С. 22–39.

16. Артемов М. А., Якубенко А. П. Математическое моделирование механического поведения вращающегося диска // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2014. № 1. С. 30–38.

17. Александров С. Е., Ломакин Е. В., Дзенг Й. Р. Решение термоупругопластической задачи для тонкого диска из пластически сжимаемого материала, подверженного термическому нагружению // Доклады Академии наук. 2012. Т. 443. № 3. С. 310–312.



18. Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов. М.: Физматлит, 1962, 456 с.

19. Timoshenko S. R, Goodier J. N. Theory of Elasticity. New York: McGraw-Hill, 1970. 506 p.

References

1. Melan E., Parkus H. Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. Wien: Springer, 1953, 107 s.

2. Gamer U. Journal of Thermal Stresses. 1985. V. 8, pp. 41–51.

3 Orcan Y., Gamer U. Acta Mechanica. 1991. V. 90, pp. 61–80.

4. Arslan E., Mack W., Eraslan A. N. Forschung im Ingenieurwesen. 2010. V. 74, pp. 27–39.

5. Artemov M. A., Baranovskii E. S. Berdzenishvili G. G., Pereyaslavskaya I. I. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2017. № 3.

URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4359.

6. Artemov M. A., Baranovskiy E. S., Berdzenishvili G. G., Pereyaslavskaya I. I. Sovremennyye metody prikladnoy matematiki, teorii upravleniya i komp'yuternykh tekhnologiy (PMTUKT-2017). Sbornik trudov X mezhdunarodnoy konferentsii. Voronezh, 2017, pp. 51–55.

7. Dats E., Murashkin E. Lecture Notes in Engineering and Computer Science, “WCE 2016 – World Congress on Engineering 2016”, pp. 69–72.

8. Artemov M. A., Baranovskiy E. S., Pereyaslavskaya I. I. Differentsial'nyye uravneniya i ikh prilozheniya v matematicheskom modelirovanii: materialy XIII Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii. Saransk, 2017, pp. 236–247.

9. Artemov M. A., Baranovskiy E. S., Pereyaslavskaya I. I. Sovremennyye problemy mekhaniki sploshnoy sredy: tezisy dokladov Mezhdunarodnoy konferentsii, posvyashchennoy pamyati akademika L. I. Sedova. Moscow, 2017, pp. 33–35.



10. Artemov M. A., Baranovskiy E. S. Poryadkovyy analiz i smezhnyye voprosy matematicheskogo modelirovaniya: teziy dokladov XIV Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii (Tsey, 3–8 iyulya 2017 g.). Vladikavkaz, 2017, pp. 137–138.

11. Poletayev Yu. V. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus). 2011, № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2011/606.

12. Poletayev Yu. V., Poletayev V. Yu. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus). 2014, № 4-1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2583.

13. Artemov M. A., Baranovskiy E. S. Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2015, № 2 (24), pp. 72–87.

14. Artemov M. A., Baranovskiy E. S., Yakubenko A. P. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika. 2015. № 1, pp. 71–82.

15. Pereyaslavskaya I. I., Artemov M. A., Baranovskiy E. S. Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2017, № 1 (31), pp. 22–39.

16. Artemov M. A., Yakubenko A. P. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika. 2014, № 1, pp. 30–38.

17. Aleksandrov S. E., Lomakin E. V., Dzeng Y. R. Doklady Akademii nauk. 2012, V. 443, pp. 310–312.

18. Rabotnov Yu. N. Soprotivleniye materialov [Resistance of materials]. Moscow: Fizmatlit, 1962, 456 p.

19. Timoshenko S. R., Goodier J. N. Theory of Elasticity. New York: McGraw-Hill, 1970. 506 p.