

Математическое моделирование нестационарного конвективного охлаждения многослойных тел при аддитивном производстве изделий

С.А. Тихомиров¹, К.С. Тихомиров²

¹Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва

²Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва

Аннотация: Температурные режимы нагрева и охлаждения при трехмерной печати являются наиболее значимой частью технологического решения при производстве изделий любой отрасли: от печати деталей для авиации и ракетостроения до строительства зданий или изготовления протезов человеческих костей. В работе рассматривается простой и достоверный способ получения расчетных значений нестационарных температур и тепловых потоков при послойной печати изделий с различными теплофизическими свойствами и неидеальным контактом между слоями, не требующий специальных программных оболочек и больших машинных ресурсов для вычислений.

Ключевые слова: нестационарный теплоперенос, многослойная печать изделий, аддитивное производство, 3D-печать изделий, нагрев и охлаждение многослойных изделий, послойное наплавление, оптимизация температурного режима печати изделий, температурный режим и скорость экструзии.

Введение

Технологический процесс создания трехмерных объектов методами аддитивных (наносимых слой за слоем) технологий связан с необходимостью выдерживать точные режимы их нагрева и охлаждения. А при создании изделий с заранее известными свойствами скорость изменения температуры каждого слоя влияет на процент появления брака, не позволяющего использовать продукцию по прямому назначению [1, 2]. В этой связи накопление полной и достоверной информации о процессах теплопереноса в составных телах с различными свойствами решает многие практические задачи конструирования [3].

В современных условиях повышенных требований к скорости конструирования, форсирование разработки и запуска в производство изделий зачастую не позволяет проводить полноценные физические эксперименты, заменяя их численными, проводимыми на мощных

компьютерах. Скорость подготовки изделий к серийному выпуску можно повысить при снижении требований к ресурсам компьютерной техники, создавая математические модели нагрева и охлаждения изделий, решение которых может взять на себя не очень мощный процессор самого принтера или небольшого дополнительного расчетного модуля к нему, например в виде дополнительного планшета или ноутбука. Возможности использования подобных систем нашли применение и в строительной отрасли [4].

Математическое описание процесса теплообмена

Температуры внутри слоев изделия зависят от времени и могут быть описаны дифференциальными уравнениями теплопроводности.

$$\frac{\partial T_i}{\partial \tau} = a_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

с начальными

$$T_i = T_i(x), \quad \tau = 0, \quad (2)$$

и граничными условиями на поверхностях внизу (нижней части стола с расположенным изделием) и охлаждаемой поверхностью, наращенной с помощью аддитивной печати:

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \alpha_{\text{вн}} (T_{\text{вн}} - T_1), \quad x = 0; \quad (3)$$

$$-\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial x} = \alpha_{\text{нар}} [T_m - T_c(\tau)], \quad x = R_m \quad (4)$$

Чаще всего граница раздела слоев при печати не учитывается при расчетах температурных режимов, однако в ходе исследований прочностных характеристик некоторыми авторами [5] выясняется, что на границе раздела слоев имеет место теплообмен в зоне контакта между соприкасающимися твердыми поверхностями. Равенства температур в зоне контакта удается добиться только в случае, если термическое сопротивление в этой зоне равно нулю, и контакт является идеальным. Однако, при нарушении технологии

печати изделий на поверхности слоев могут появляться неровности [6]. Поэтому контакт соприкасающихся поверхностей часто имеет дискретный характер, а термическое сопротивление в зоне контакта приводит к наличию перепада температур между отдельными слоями изделия. Учитывать фактор наличия термического сопротивления в зоне контакта можно при «сравнении» расчетных и фактических температур процесса охлаждения изделия, а при нарушении технологии изготовления данный факт будет обнаруживаться методами теплового неразрушающего контроля.

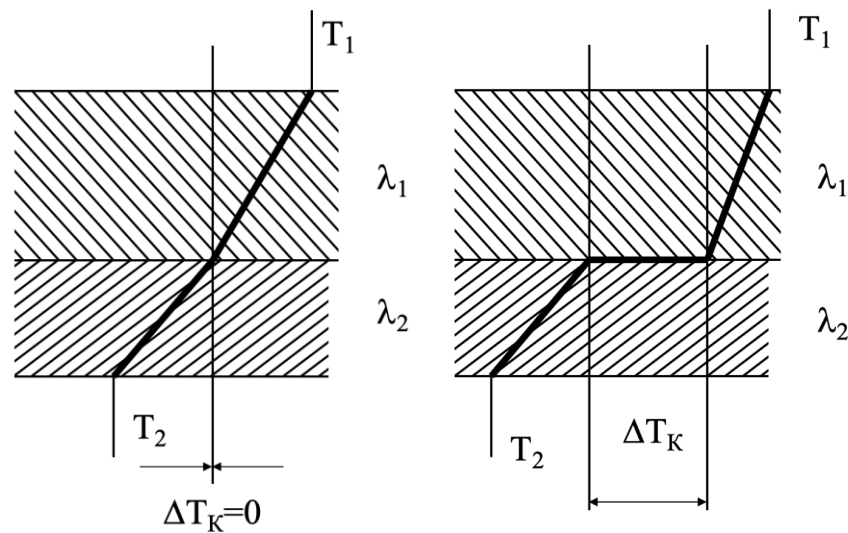


Рис. 1. – Идеальный и неидеальный контакт двух слоев изделия.

На рис. 1 показаны термопрофили в материалах слоев изделия при идеальном (равенство температур) и неидеальном контакте (перепад температур в зоне контакта) двух слоев изделия с негладкой поверхностью. Дополнительный температурный перепад ΔT_k зависит от теплофизических параметров среды в зазорах, состояния поверхностей и нагрузки на них, осреднённой температуры на стыке, удельной величины q_k , а ΔT_k определяется обычно экспериментально. ΔT_k соответствует R_k при прохождении через зону контакта среднего удельного теплового потока $q_k \uparrow$

$$R_k = \Delta T_k / q_k$$

Практически 98 % тепла в зоне стыка распространяется теплопроводностью в месте фактического контакта поверхностей и газовой прослойки [7], размеры которой слишком малы для возникновения конвективных токов. Следовательно, конвекцией здесь пренебрегают. Так как температура печати не превышает 550 °С, то и лучистый тепловой поток не превышает 2% от общей величины [8] и им тоже можно пренебречь.

α_k рассчитывается как обратно-пропорциональный R_k параметр, а по сути есть общая сумма проводимостей фактических зон контакта α_m и вещества между зазорами (α_c), т. е.

$$\alpha_k = \alpha_m + \alpha_c$$

или

$$1/R_k = 1/R_m + 1/R_c$$

где R_m — сопротивление контактной области; R_c — сопротивление среды в полостях.

Термическая проводимость контакта и сумма термических проводимостей контактных областей и сред в полостях связаны между собой, и эта связь правильно отражает качественные и количественные зависимости R_k .

Постановка задачи математического описания теплообмена на стыке слоев:

$$\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial x} = \frac{T_{i+1} - T_i}{R_{ki}} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial x}, \quad x = x_i \quad (5)$$

Закон изменения температуры охлаждающего воздуха $T_c = T_c(\tau)$, λ_i , теплоотдача со стороны наращенной путем послойной печати охлаждаемой поверхности $\alpha_{нар}$, нижней части поверхности стола $\alpha_{вн}$ и расчетная

температура $T_{вн}$ принимаются по справочным или экспериментальным данным и не вызывают дополнительных затруднений [9]. Зависимость температуры охлаждающей среды от времени определяется только технологической картой процесса производства, а параметры теплоотдачи оцениваются по критериальным зависимостям из справочной литературы.

Система уравнений (1) – (5) в обобщенных переменных:

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial Fo} = A_i \frac{\partial^2 \Theta_i}{\partial X^2}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (6)$$

$$\Theta_i = \Theta_i(X), \quad Fo = 0; \quad (7)$$

$$-\frac{\partial \Theta_1}{\partial X} = Bi_{вн} (\Theta_{вн} - \Theta_1), \quad X = 0; \quad (8)$$

$$-\frac{\partial \Theta_m}{\partial X} = Bi_{нар} [\Theta_m - \Theta_c(Fo)], \quad X = 1; \quad (9)$$

$$\Theta_i = \Theta_{i+1}, \quad \Lambda_i \frac{\partial \Theta_i}{\partial X} = \frac{\partial \Theta_{i+1}}{\partial X}, \quad X = X_i \quad (10)$$

или

$$\Lambda_i \frac{\partial \Theta_i}{\partial X} = Bi_{ki} (\Theta_{i+1} - \Theta_i) = \frac{\partial \Theta_{i+1}}{\partial X}, \quad X = X_i \quad (11)$$

Здесь

$\Theta = \frac{T}{T_*}$ – температура, записанная в безразмерном виде, а T_* – масштаб

отнесения,

$X = \frac{x}{R_m}$ – координата в безразмерной форме, R_m – общая толщина слоев

изделия,

$Fo = \frac{a_1 \tau}{R_m^2}$ – безразмерный параметр Фурье, a – коэффициент, характеризующий скорость изменения температуры вещества в нестационарных тепловых процессах, τ – время,

$Bi_{\text{вн}} = \frac{\alpha_{\text{вн}} R_m}{\lambda_m}, \quad Bi_{\text{нар}} = \frac{\alpha_{\text{нар}} R_m}{\lambda_m}$ – безразмерные параметры, учитывающие отношение термического сопротивления стенки к термическому сопротивлению передачи тепла на поверхности,

$Bi_{ki} = \frac{R_m}{\lambda_{i+1} R_{ki}}$ – безразмерный параметр для учета интенсивности теплообмена в зоне контакта. Рассчитывается по величине R_{ki} на границе соприкосновения i -го и $(i + 1)$ -го слоев и отдельных слоев изделия.

$$A_i = \frac{a_i}{a_1}, \quad \Lambda_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}}$$

Приближенный аналитический метод расчета

Нестационарный теплоперенос слоях изделия имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta_i(X, Fo)}{\partial Fo} = \frac{a_i}{a_1} \left(\frac{\partial^2 \Theta_i(X, Fo)}{\partial X^2} + \frac{\Gamma}{X} \frac{\partial \Theta_i(X, Fo)}{\partial X} \right) \quad (12)$$

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} \frac{\partial \Theta_i(X_i, Fo)}{\partial X} = Bi_{Ki} [\Theta_{i+1}(X_i, Fo) - \Theta_i(X_i, Fo)] = \frac{\partial \Theta_{i+1}(X_i, Fo)}{\partial X} \quad (13)$$

$$- \frac{\partial \Theta_1(X_0, Fo)}{\partial X} = Bi_{\text{вн}} [\Theta_{c1}(Fo) - \Theta_1(X_0, Fo)] \quad (14)$$

$$\frac{\partial \Theta_m(1, Fo)}{\partial X} = Bi_{\text{нар}} [\Theta_{c2}(Fo) - \Theta_m(1, Fo)] \quad (15)$$

$$\Theta_i(X, 0) = \Theta_i(X) \quad (16)$$

Решить задачу (12) – (16) можно, записав ее в виде

$$\begin{aligned}\Theta_i(X, Fo) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n K_{n,i}(X) \exp(-\mu_n^2 Fo) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} D_n K_{n,i}(X) \exp(-\mu_n^2 Fo) \int_0^{Fo} \Theta_{c1}(\eta) \exp \mu_n^2 \eta d\eta + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} E_n K_{n,i}(X) \exp(-\mu_n^2 Fo) \int_0^{Fo} \Theta_{c2}(\eta) \exp \mu_n^2 \eta d\eta\end{aligned}\quad (17)$$

$K_{n,i}(X)$ определяются:

в случае плоского составного изделия ($\Gamma = 0$)

$$K_{n,i}(X) = B_{n,i} \cos \mu_n \sqrt{K_{ai}} X + C_{n,i} \sin \mu_n \sqrt{K_{ai}} X;$$

$$B_{n,i} = 1; C_{n,i} = \frac{\operatorname{tg} \mu_n X_0 + \frac{Bi_1}{\mu_n}}{1 - \frac{Bi_1}{\mu_n} \operatorname{tg} \mu_n X_0} \text{ при } X_0 = 0, C_{n,i} = \frac{Bi_1}{\mu_n}$$

в случае цилиндрического изделия ($\Gamma = 1$)

$$K_{n,i}(X) = B_{n,i} J_0(\mu_n \sqrt{K_{ai}} X) + C_{n,i} Y_0(\mu_n \sqrt{K_{ai}} X);$$

$$B_{n,i} = 1; C_{n,i} = - \left[J_1(\mu_n X_0) + \frac{Bi_1}{\mu_n} J_0(\mu_n X_0) \right] \times \left[Y_1(\mu_n X_0) + \frac{Bi_1}{\mu_n} Y_0(\mu_n X_0) \right]^{-1}$$

в случае сферического изделия ($\Gamma = 2$):

$$K_{n,i}(X) = B_{n,i} \frac{\sin \mu_n \sqrt{K_{ai}} X}{X} + C_{n,i} \frac{\cos \mu_n \sqrt{K_{ai}} X}{X}$$
$$B_{n,i} = 1; C_{n,i} = \frac{\mu_n \cos \mu_n X_0 - \sin \mu_n X_0 (Bi_1 + \frac{1}{X_0})}{\mu_n \sin \mu_n X_0 - \cos \mu_n X_0 (Bi_1 + \frac{1}{X_0})}.$$

A_n определяются на основе начального условия и рассчитываются:

$$A_n = \left(\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{a_i} \int_{X_{i-1}}^{X_i} X^\Gamma \Theta_i(X) K_{n,i}(X) dX \right) \times \\ \times \left(\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{a_i} \int_{X_{i-1}}^{X_i} X^\Gamma K_{n,i}^2(X) dX \right)^{-1} \quad (18)$$

$B_{n,i}$ и $C_{n,i}$ ($i \neq 1$) являются постоянными и определяются из (13). Если $R_{ki} \neq 0$, то имеем:

плоское неоднородное изделие ($\Gamma = 0$)

$$B_{n,i+1} = B_{n,i} (y_{1,i} + K_i y_{2,i} - \mu_n \sqrt{K_{ai+1}} \frac{K_i}{Bi_{ki}} z_{1,i}) + \\ + C_{n,i} (z_{1,i} - K_i z_{2,i} + \mu_n \sqrt{K_{ai+1}} \frac{K_i}{Bi_{ki}} y_{2,i}) \quad (19)$$

$$C_{n,i+1} = B_{n,i} (z_{2,i} - K_i z_{1,i} - \mu_n \sqrt{K_{ai+1}} \frac{K_i}{Bi_{ki}} y_{2,i}) + \\ + C_{n,i} (y_{2,i} + K_i y_{1,i} + \mu_n \sqrt{K_{ai+1}} \frac{K_i}{Bi_{ki}} z_{2,i}) \quad (20)$$

$$y_{1,i} = \cos v_{n,i} \cos \delta_{n,i}; \quad y_{2,i} = \sin v_{n,i} \sin \delta_{n,i};$$

$$z_{1,i} = \sin v_{n,i} \cos \delta_{n,i}; \quad z_{2,i} = \cos v_{n,i} \sin \delta_{n,i}.$$

Числа μ_n вычисляются:

в случае плоского изделия ($\Gamma = 0$):

$$\frac{v_n}{Bi_{нар}} = \frac{1 + \Gamma_n \operatorname{tg} v_n}{\operatorname{tg} v_n - \Gamma_n} \quad (21)$$

в случае цилиндрического изделия ($\Gamma = 1$):

$$\frac{v_n}{Bi_{нар}} = \frac{J_0(v_n) + \Gamma_n Y_0(v_n)}{J_1(v_n) + \Gamma_n Y_1(v_n)} \quad (22)$$

в случае сферического изделия ($\Gamma = 2$):

$$\frac{v_n}{1 - Bi_{нар}} = \frac{\Gamma_n + tg v_n}{1 - \Gamma_n tg v_n} \quad (23)$$

где

$$v_n = \mu_n \sqrt{Ka_m}; \quad \Gamma_n = \frac{C_{n,m}}{B_{n,m}}.$$

Решение системы (12) – (16) получено при условии известных законов изменения температуры охлаждающего воздуха со стороны наращенной путем послойной печати охлаждаемой поверхности и температуры среды возле нижней части поверхности стола, которые подставляются в уравнение (17). Чтобы исключить необходимость непростого разрешения через элементарные функции интегралов в правой части выражения (17), трижды проинтегрированы по частям комплексы:

$$\int_0^{Fo} \Theta_{c1}(\eta) \exp \mu_n^2 \eta d\eta \quad \text{и} \quad \int_0^{Fo} \Theta_{c2}(\eta) \exp \mu_n^2 \eta d\eta,$$

следовательно, равенство (17) запишется:

$$\begin{aligned} \Theta_i(X, Fo) = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \left[D_n \Theta_{c1}(Fo) - \frac{D_n}{\mu_n^2} \Theta'_{c1}(Fo) + \right. \\ & + \frac{D_n}{\mu_n^4} \Theta''_{c1}(Fo) + E_n \Theta_{c2}(Fo) - \frac{E_n}{\mu_n^2} \Theta'_{c2}(Fo) + \\ & + \left. \frac{E_n}{\mu_n^4} \Theta''_{c2}(Fo) \right] K_{n,i}(X) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n - \Theta_{c1}(0) \frac{D_n}{\mu_n^2} + \right. \\ & + \left. \Theta'_{c1}(0) \frac{D_n}{\mu_n^4} - \Theta''_{c1}(0) \frac{D_n}{\mu_n^6} - \Theta_{c2}(0) \frac{E_n}{\mu_n^2} + \Theta'_{c2}(0) \frac{E_n}{\mu_n^4} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\Theta_{c2}''(0) \frac{E_n}{\mu_n^6} K_{n,i}(X) \exp(-\mu_n^2 Fo) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^6} \left(D_n \int_0^{Fo} \Theta_{c1}'''(\eta) \exp \mu_n^2 \eta d\eta + E_n \int_0^{Fo} \Theta_{c2}'''(\eta) \exp \eta d\eta \right) \times \\ & \times K_{n,i}(X) \exp(-\mu_n^2 Fo) \end{aligned} \quad (24)$$

Получаемые корни μ_n пропорционально прирастают с ростом числа слоев печатаемого изделия. Обе последние суммы в правой части уравнения (24) не вносят фактического вклада по сравнению с остальными слагаемыми этого выражения. А ряды:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{\mu_n^2} K_{n,i}(X); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{\mu_n^4} K_{n,i}(X); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{\mu_n^6} K_{n,i}(X); \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{\mu_n^2} K_{n,i}(X); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{\mu_n^4} K_{n,i}(X); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{\mu_n^6} K_{n,i}(X) \end{aligned}$$

удаётся свернуть, обозначая:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{\mu_n^2} K_{n,i}(X) = \beta_{1,i}(X); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{\mu_n^2} K_{n,i}(X) = \gamma_{1,i}(X); \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{\mu_n^4} K_{n,i}(X) = \beta_{2,i}(X); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{\mu_n^4} K_{n,i}(X) = \gamma_{2,i}(X); \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{\mu_n^6} K_{n,i}(X) = \beta_{3,i}(X); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{\mu_n^6} K_{n,i}(X) = \gamma_{3,i}(X). \end{aligned}$$

$\beta_{1,i}$ и $\gamma_{1,i}$ должны удовлетворять:

$$\frac{d^2 \beta_{1,i}}{dX^2} + \frac{\Gamma}{X} \cdot \frac{d\beta_{1,i}}{dX} = 0; \quad (25)$$

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} \cdot \frac{d\beta_{1,i}(X)}{dX} = Bi_{ki} [\beta_{1,i+1}(X) - \beta_{1,i}(X)] = \frac{d\beta_{1,i+1}(X)}{dX},$$
$$-\frac{d\beta_{1,1}(X)}{dX} = Bi_{\text{вн}} [1 - \beta_{1,1}(X_0)]; \quad (26)$$

$$\frac{d\beta_{1,m}(1)}{dX} = -Bi_{\text{нар}} \beta_{1,m}(1) \text{ и } \gamma_{1,i}'' + \frac{\Gamma}{X} \gamma_{1,i}' = 0; \quad (27)$$

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} \cdot \frac{d\gamma_{1,i}(X)}{dX} = Bi_{ki} [\gamma_{1,i+1}(X) - \gamma_{1,i}(X)] = \frac{d\gamma_{1,i+1}(X)}{dX}$$
$$\frac{d\gamma_{1,1}(X_0)}{dX} = Bi_{\text{вн}} \gamma_{1,1}(X_0); \quad (28)$$

$$\frac{d\gamma_{1,m}(1)}{dX} = Bi_{\text{нар}} [1 - \gamma_{1,m}(1)].$$

Если проанализировать выражения (25) – (26) и (27) – (28), то можно установить, что:

$$\gamma_{1,i}(X) = 1 - \beta_{1,i}(X).$$

В результате интегрирования (25) – (26):

в случае плоского составного изделия ($\Gamma = 0$)

$$\beta_{1,i}(X) = l_i + h_i X;$$

в случае цилиндрического изделия ($\Gamma = 1$):

$$\beta_{1,i}(X) = l_i + h_i \ln X;$$

в случае сферического изделия ($\Gamma = 2$):

$$\beta_{1,i}(X) = l_i + h_i \frac{1}{X}.$$

l_i и h_i являются константами и выражаются из условий (26). Если известны $\beta_{1,i}$ и $\gamma_{1,i}$, то D_n и E_n определяются так:

$$D_n = \mu_n^2 \left[\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{a_i} \int_{X_{i-1}}^{X_i} X^\Gamma \beta_{1,i}(X) K_{n,i}(X) dX \right] \times \\ \times \left(\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{a_i} \int_{X_{i-1}}^{X_i} X^\Gamma K_{n,i}^2(X) dX \right)^{-1}; \quad (29)$$

$$E_n = \mu_n^2 \left[\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{a_i} \int_{X_{i-1}}^{X_i} X^\Gamma \gamma_{1,i}(X) K_{n,i}(X) dX \right] \times \\ \times \left(\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{a_i} \int_{X_{i-1}}^{X_i} X^\Gamma K_{n,i}(X) dX \right)^{-1}. \quad (30)$$

$\beta_{2,i}(X)$ и $\gamma_{2,i}(X)$ можно получить из следующих систем уравнений:

$$\beta_{2,i}'' + \frac{\Gamma}{X} \beta_{2,i}' = -\frac{a_1}{a_i} \beta_{1,i}; \quad (31)$$

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} \cdot \frac{d\beta_{2,i}(X_i)}{dX} = Bi_{ki} [\beta_{2,i+1}(X_i) - \beta_{2,i}(X)] = \frac{d\beta_{2,i+1}(X_i)}{dX};$$

$$\frac{d\beta_{2,i}(X_0)}{dX} = Bi_{\text{вн}} \beta_{2,i}(X_0); \quad (32)$$

$$\frac{d\beta_{2,m}(1)}{dX} = -Bi_{\text{нар}} \beta_{2,m}(1)$$

$$\gamma_{2,i}'' + \frac{\Gamma}{X} \gamma_{2,i}' = -\frac{a_1}{a_i} \gamma_{1,i} \quad (33)$$

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} \cdot \frac{d\gamma_{2,i}(X_i)}{dX} = Bi_{ki} [\gamma_{2,i+1}(X_i) - \gamma_{2,i}(X_i)] = \frac{d\gamma_{2,i+1}(X_i)}{dX}$$

$$\frac{d\gamma_{2,1}(X_0)}{dX} = Bi_{\text{вн}} \gamma_{2,1}(X_0); \quad (34)$$

$$\frac{d\gamma_{2,m}(1)}{dX} = -Bi_{\text{нар}} \gamma_{2,m}(1).$$

Для нахождения $\beta_{3,i}(X)$ и $\gamma_{3,i}(X)$ системы уравнений записываются:

$$\beta_{3,i}'' + \frac{\Gamma}{X} \beta_{3,i}' = -\frac{a_1}{a_i} \beta_{2,i} \quad (35)$$

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} \cdot \frac{d\beta_{3,i}(X_i)}{dX} = Bi_{ki} [\beta_{3,i+1}(X_i) - \beta_{3,i}(X_i)] = \frac{d\beta_{3,i+1}(X_i)}{dX}$$

$$\frac{d\beta_{3,1}(X_0)}{dX} = Bi_{вн} \beta_{3,1}(X_0) \quad (36)$$

$$\frac{d\beta_{3,m}(1)}{dX} = -Bi_{нар} \beta_{3,m}(1) \text{ и } \gamma_{3,i}'' + \frac{\Gamma}{X} \gamma_{3,i}' = -\frac{a_1}{a_i} \gamma_{2,i} \quad (37)$$

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} \cdot \frac{d\gamma_{3,i}(X_i)}{dX} = Bi_{ki} [\gamma_{3,i+1}(X_i) - \gamma_{3,i}(X_i)] = \frac{d\gamma_{3,i+1}(X_i)}{dX}$$

$$\frac{d\gamma_{3,1}(X_0)}{dX} = Bi_{вн} \gamma_{3,1}(X_0)$$

$$\frac{d\gamma_{3,m}(1)}{dX} = -Bi_{нар} \gamma_{3,m}(1).$$

Поэтому (24) получает вид следующего выражения:

$$\begin{aligned} \Theta_i(X, Fo) = & \Theta_{c2} - (\Theta_{c2} - \Theta_{c1})\beta_{1,i}(X) - \Theta_{c1}'\beta_{2,i}(X) + \\ & + \Theta_{c1}''\beta_{3,i}(X) - \Theta_{c2}'\gamma_{2,i}(X) + \Theta_{c2}''\gamma_{3,i}(X) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} A_n' K_{n,i}(X) \exp(-\mu_n^2 Fo) \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} A_n' = & A_n - \left[\Theta_{c1}(0) - \frac{1}{\mu_n^2} \Theta_{c1}'(0) + \frac{1}{\mu_n^4} \Theta_{c1}''(0) \right] \frac{D}{\mu_n^2} - \\ & - \left[\Theta_{c2}(0) - \frac{1}{\mu_n^2} \Theta_{c2}'(0) + \frac{1}{\mu_n^4} \Theta_{c2}''(0) \right] \frac{E}{\mu_n^2} - \end{aligned} \quad (39)$$

Можно утверждать, что (38) является приближенным случаем, если Θ_{c1} и Θ_{c2} выражены произвольными зависимостями. Но, когда Θ_{c1} и Θ_{c2} определяются через функцию времени – полиному не выше второй степени – то решение становится точным. При нестационарном охлаждении изделий по аддитивной технологии при конвективном теплообмене упростить приближенные решения можно, когда теплофизические характеристики материалов слоев различаются не слишком существенно [9], что также имеет распространенное явление на практике [10-12].

Рассмотрим нестационарное охлаждение изделий по аддитивной технологии при конвективном теплообмене в среде нулевой температуры послойной конструкции с идеальным контактом слоев. Для изделия из m слоев с равномерной температурой в начальный момент времени система уравнений в безразмерной форме будет следующей:

$$\frac{a_i}{a_1} \cdot \frac{\partial^2 \Theta_i}{\partial X^2} = \frac{\partial \Theta_i}{\partial Fo} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (40)$$

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial X} = 0 \quad \text{при } X = 0 \quad (41)$$

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} \cdot \frac{\partial \Theta_i}{\partial X} = \frac{\partial \Theta_{i+1}}{\partial X} \quad \text{при } X = X_i \quad (42)$$

$$\Theta_i = \Theta_{i+1} \quad \text{при } X = X_i \quad (43)$$

$$\frac{\partial \Theta_m}{\partial X} = -Bi \Theta_m \quad \text{при } X = X_m \quad (44)$$

$$\Theta_i = 1 \quad \text{при } Fo = 0 \quad (45)$$

Систему (40) – (45) представим так:

$$\Theta_i(X, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \mu_n (b_i + Z_i X) \exp(-\beta_n^2 Fo) \quad (46)$$

Постоянные b_i находятся по формуле, вида:

$$b_{i+1} = b_i + (Z_i - Z_{i+1})X_i \quad (47)$$

причем $b_1 = 0$ и $Z_1 = 1$.

Числа μ_n определяются из уравнения, не являющегося алгебраическим:

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{\gamma}{Bi^*} \quad (48)$$

где γ и Bi^* находятся согласно выражениям:

$$\gamma_n = \mu_n (b_m + Z_m X_m); \quad Bi^* = \frac{b_m + Z_m X_m}{Z_m}.$$

A_n определяются из выражения:

$$A_n = \frac{2 \sin \gamma_n}{\gamma_n + \sin \gamma_n \cos \gamma_n}. \quad (49)$$

Выражения (48) – (49) использовались для вычисления значения для каждого соответствующего аргумента, заданного с известным шагом, в четко установленных границах параметра Bi^* . В (46) выполнено точное

согласование с краевыми условиями (41), (43), (44) и (45). Если $Z_i = \frac{\lambda_1}{\lambda_i}$, то

(46) строго удовлетворяет (42), а при $Z_i = \sqrt{\frac{a_1}{a_i}}$ - (40). Вариация Z_i от $\frac{\lambda_1}{\lambda_i}$ до

$\sqrt{\frac{a_1}{a_i}}$ приводит к наилучшему приближенному решению (46) и условию (42)

уравнения (40). Из (46) для Z_i выражение принимает вид:

$$Z_i = \sqrt{\frac{K_{\delta i}^2}{4} + K_{\delta i} K_{\lambda i} + K_{a i}} - \frac{K_{\delta i}}{2} \quad (50)$$

Где:

$$K_{\delta i} = \frac{\delta_1}{\delta_i}; \quad K_{\lambda i} = \frac{\lambda_1}{\lambda_i}; \quad K_{a i} = \frac{a_1}{a_i}$$

Для вычисления β_n принимается условие равенства изменения внутренней энергии составного послойного изделия при аддитивной печати за определенный временной отрезок и величины тепла, отведенного в охлаждающую среду за то же время, а именно:

$$K_{\lambda m} \sum_{i=1}^m \frac{K_{a i}}{K_{\lambda i}} \int_{X_{i-1}}^{X_i} (1 - \Theta_i) dX = Bi \int_0^{Fo} \Theta_m d\eta \Big|_{X=X_m} \quad (51)$$

После интегрирования:

$$\beta_n^2 = \frac{\mu_n^2 (b_m + Z_m X_m)}{\frac{K_{\lambda m}}{Z_m} \sum_{i=1}^m \frac{K_{a i}}{K_{\lambda i}} (X_i - X_{i-1})} \quad (52)$$

С помощью (46) возможно определять поля температур в теле с различными свойствами во всех его точках. Преобразовать решение (46) в точное возможно при равенстве:

$$\sqrt{\frac{a_1}{a_i}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \quad (53)$$

Если упругие свойства тела одинаковы во всех его точках, то решение является строгим при прогреве многослойного изделия с низкими термическими сопротивлениями слоев.

Высокая точность результатов получается при $\varpi_i = \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \sqrt{\frac{a_1}{a_i}}$ и выполнении условия $0.5 \leq \varpi_i \leq 2.0$.

Разностная схема расчета нестационарных температур в многослойных изделиях

Если применять основанный на методе конечных разностей метод элементарных балансов, применять способ деления изделия при послойной аддитивной печати на однородные элементы, то зависимости решения разностной задачи из системы дифференциальных уравнений (6) – (11) могут быть представлены в виде разностных зависимостей. Деление на части создаваемого по аддитивной технологии изделия для расчета приведено на рис. 2.

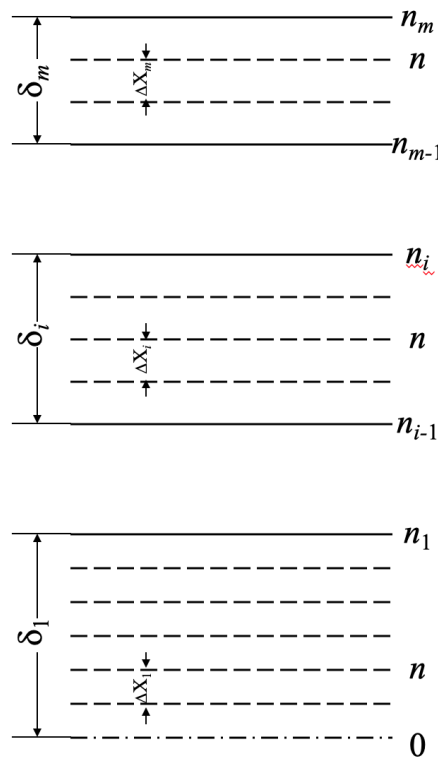


Рис. 2. – Схема деления печатаемого изделия для расчета.

Программа для расчета разработана на основе разностной схемы аппроксимации дифференциальных уравнений теплопроводности и краевых условий. Разностные уравнения для решения исходной системы (6) – (11) теплообмена:

а) расчетная точка находится внутри i -го слоя печатаемого изделия

$$\Theta_{n, Fo+\Delta Fo} = \Theta_{n, Fo} + \Delta Fo N^2 (\Theta_{n-1, Fo} - 2\Theta_{n, Fo} + \Theta_{n+1, Fo});$$

б) расчетная точка – на границе i -го и $(i+1)$ -го слоев ($n = n_i$) печатаемого изделия:

идеальный контакт:

$$\Theta_{n_i, Fo+\Delta Fo} = \Theta_{n_i, Fo} + \frac{2\Delta Fo N^2}{1 + K_i} [K_i (\Theta_{n_i-1, Fo} - \Theta_{n_i, Fo}) - \Theta_{n_i, Fo} + \Theta_{n_i+1, Fo}]$$

неидеальный контакт:

$$\Theta_{n_i, Fo+\Delta Fo} = \Theta_{n_i, Fo} + \frac{2\Delta Fo N}{\Lambda_i} [Bi_{ki} (\Theta_{n_i+1, Fo} - \Theta_{n_i, Fo}) - N\Lambda_i (\Theta_{n_i, Fo} - \Theta_{n_i-1, Fo})];$$

$$\Theta_{n_i+1, Fo+\Delta Fo} = \Theta_{n_i+1, Fo} + \frac{2\Delta Fo N}{q_i} [Bi_{ki} (\Theta_{n_i, Fo} - \Theta_{n_i+1, Fo}) - Nq_i (\Theta_{n_i+1, Fo} - \Theta_{n_i+2, Fo})];$$

в) расчетная точка – на наращиваемой при аддитивной печати поверхности изделия ($n = n_m$)

$$\Theta_{n_m, Fo+\Delta Fo} = \Theta_{n_m, Fo} + 2\Delta Fo N \sqrt{\frac{a_m}{a_1}} Bi_{нар} [\Theta_c(Fo) - \Theta_{n_m, Fo}] - 2\Delta Fo N^2 (\Theta_{n_m, Fo} - \Theta_{n_m-1, Fo});$$

г) расчетная точка – на поверхности в нижней части печатаемого изделия ($n = 0$)

$$\Theta_{0, Fo+\Delta Fo} = \Theta_{0, Fo} + 2\Delta Fo N^2 (\Theta_{1, Fo} - \Theta_{0, Fo}) - 2\Delta Fo N Bi_{вн} (\Theta_{0, Fo} - \Theta_{вн}).$$

В приведенных формулах

$$q_i = \sqrt{\frac{a_1}{a_i}}, \quad K_i = \Lambda_i \sqrt{\frac{a_{i+1}}{a_i}}, \quad N = \frac{1}{\Delta X_1},$$
$$\Delta X_1 = \frac{\Delta x_1}{R_m}, \quad \Delta X_i = \Delta X_1 \sqrt{\frac{a_i}{a_1}}, \quad n = \sum_{j=1}^i \frac{X_j - X_{j-1}}{\Delta X_j}$$

Чтобы повысить скорость сходимости разностных уравнений и обеспечить их устойчивость, выбор шага по времени осуществляется на основе равенства $\Delta F_0 N^2 + \Delta F_0 B i_{нар} N = 0,5$. Для снижения погрешности расчетов применялся принцип Рунге, так как исследованию подлежали задачи, не имеющие точных аналитических решений. ΔX и ΔF_0 выбирались предварительно на основе расчетов, а затем их значения постепенно меняли в меньшую сторону настолько, пока разность конечных результатов вплоть до четвертого знака после запятой не становилась равной нулю. В этом случае погрешность вычислений нигде не выходила за пределы 0,1 %.

Литература

1. Балашов А.В., Маркова М.И. Исследование структуры и свойств изделий, полученных 3D-печатью // Инженерный вестник Дона. 2019. № 1. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_150_Balachov_Markova.pdf_b4469f3dc9.pdf.
2. Осколков А.А., Матвеев Е.В., Безукладников И.И., Трушников Д.Н., Кротова Е.Л. Передовые технологии аддитивного производства металлических изделий // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение. 2018. Т. 20. № 3. С. 90-105.
3. Зарипов Р.Р., Смольянинов Н.Е. Сравнительный анализ инновационных технологий в сфере послойного синтеза изделий // Инновационная

- экономика: Материалы Региональной научной конференции-школы для молодежи. Уфа: ГОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет». 2018. С. 148-155.
4. Власова Т.А. Экологические аддитивные технологии в строительстве: обзор // Инженерный вестник Дона. 2019. № 6. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N6y2019/6015.
 5. Yang T.C. Effect of extrusion temperature on the physico-mechanical properties of unidirectional wood fiber-reinforced polylactic acid composite (WFRPC) components using fused deposition modeling // *Polymers*. 2018. Vol. 10. No 9. pp. 976.
 6. Huang Zh., Tingchun S., Xiuyan Y. The Optimization of FDM 3D Printer's Structure Based on Finite Element Analysis // *MATEC Web Conf.*, 2018 International Conference on Progress in Mechanical and Aerospace Engineering (PMAE 2018). 2019. Vol. 257. Pp. 02004.
 7. Lee C.W., Kim H.W., Woo J. H., Park K. Thermal-Fluid Coupled Analysis of the Nozzle Part for the FDM 3D Printers Considering Flow Characteristics of Cooling Fan // *Journal of the Korean Society for Precision Engineering*. 2018. Vol. 35 (5). Pp. 479–484.
 8. Senai Y. Thermal analysis of a 3d printer hotend and nozzle // 4th International Congress on 3d printing (additive manufacturing) technologies and digital industry. 2019. Pp. 1368–1375.
 9. Jerez-Mesa R. A. Comparative study of the thermal behavior of three different 3D printer liquefiers // *Mechatronics*. 2018. Vol. 56. Pp. 297–305.
 10. Shin D.Y., Lee H., Lee C.W., Park K. Thermal-Structural Coupled Numerical Analysis for Design of High-Temperature Extruder of FDM 3D Printers // *Journal of the Korean Society for Precision Engineering*. 2018. Vol. 24, № 3. Pp. 341–347.
-

11. Shishir K.S., Satankar K.R. Numerical and analytical analysis of 3D printer extruder in Fused Deposition Modelling // International Journal of Emerging Technologies and Innovative Research. 2017. Vol. 4, iss. 10. Pp. 10–22.
12. Gutiérrez Arias G., Jiménez Díaz F., Ramírez E. R., Guzman J. V. Thermal Analysis by Finite Elements of Hotends for 3D Printing by Fused Filament Fabrication // Periodica Polytechnica Mechanical Engineering. 2021. Vol. 65 (2). Pp. 129–133.

References

1. Balashov, A.V., Markova, M.I. Inzhenernyj vestnik Dona, № 1. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_150_Balashov_Markova.pdf_b4469f3dc9.pdf.
2. Oskolkov A.A., Matveev E.V., Bezukladnikov I.I., Trushnikov D.N., Krotova E.L. Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mashinostroenie, materialovedenie. 2018. T. 20. № 3. Pp. 90-105.
3. Zaripov R.R., Smol'yaninov N.E. Innovacionnaya ekonomika: Materialy Regional'noj nauchnoj konferencii-shkoly dlya molodezhi. (Innovative Economy: Materials of the Regional Scientific Conference-School for Youth.) Ufa: GOU VPO «Ufimskij gosudarstvennyj aviacionnyj tekhnicheskij universitet». 2018. Pp. 148-155.
4. Vlasova T.A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2019. № 6. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N6y2019/6015.
5. Yang T. C. Polymers. 2018. Vol. 10. No 9. P. 976.
6. Huang Zh., Tingchun S., Xiuyan Y. MATEC Web Conf., 2018 (International Conference on Progress in Mechanical and Aerospace Engineering (PMAE 2018)). 2019. Vol. 257. P. 02004.



7. Lee C.W., Kim H.W., Woo J. H., Park K. Journal of the Korean Society for Precision Engineering. 2018. Vol. 35 (5). Pp. 479–484.
8. Senai Y. 4th International Congress on 3d printing (additive manufacturing) technologies and digital industry. 2019. Pp. 1368–1375.
9. Jerez-Mesa R. A. Mechatronics. 2018. Vol. 56. Pp. 297–305.
10. Shin D.Y., Lee H., Lee C.W., Park K. Journal of the Korean Society for Precision Engineering. 2018. Vol. 24, № 3. Pp. 341–347.
11. Shishir K.S., Satankar K.R. International Journal of Emerging Technologies and Innovative Research. 2017. Vol. 4, iss. 10. Pp. 10–22.
12. Gutiérrez Arias G., Jiménez Díaz F., Ramírez E. R., Guzman J. V. Periodica Polytechnica Mechanical Engineering. 2021. Vol. 65 (2). Pp. 129–133.