

## Изучение зависимости прочности цементных композитов от их фрактальной размерности

*Ю.А. Макаров*

*Национальный исследовательский Мордовский государственный университет  
им. Н. П. Огарёва, г. Саранск*

**Аннотация:** Статья рассматривает вопрос взаимосвязи прочности цементных композитов и фрактальной размерности их структуры. Предполагается, что измерение фрактальной размерности материала на макроуровне может быть использовано для оценки как его прочности, так и ряда других физико-механических показателей, связанных с особенностями микроструктуры. Показано, что между фрактальной размерностью цементного композита и его прочностью существует определенная зависимость.

**Ключевые слова:** Фрактальная размерность, микроструктура, прочность, цементный композит, композиционный строительный материал, планирование эксперимента, трехкомпонентная система, уравнение регрессии, коэффициент регрессии.

В разное время авторами научных исследований, проведенных в области композиционных строительных материалов (КСМ), было показано, что их свойства тесно связаны с особенностями микроструктуры [1, 2].

Структуру КСМ, в свою очередь, возможно смоделировать с использованием методов одной из областей неевклидовой геометрии – фрактальной геометрии [3, 4].

Что же такое фрактал? В математике фрактал есть множество, часть которого подобна целому [5]. В настоящее время фракталом обычно называют графическое изображение, структура которого на микро- и макроуровнях подобна сама себе [4, 6]. У фрактального рисунка нет одинаковых элементов, но прослеживается подобие в любом масштабе.

Используя фрактальные закономерности, можно по изображению макроструктуры материала достаточно точно описать его микроструктуру, а, следовательно, и его физические и механические свойства [7].

Ранее автор работы изучил, как состав цементных композитов влияет на показатель фрактальной размерности, и получил уравнение регрессии [8].

Предположительно, подобными алгоритмами можно описать и различные физико-механические свойства КСМ.

В свете этих представлений, автор статьи провел серию экспериментов, целью которых являлась проверка гипотезы о связи фрактальной размерности цементных композитов с их прочностью при сжатии [9].

Задача решалась методами теории планирования эксперимента. Состав исследуемого материала изображали как равносторонний треугольник (рис.1), в вершинах которого содержание регулируемых компонентов смеси равно 100%, а область внутри треугольника отражает процентное соотношение между компонентами. В состав композита были включены следующие составляющие исходного сырья:

$x_1$  – мелкодисперсный наполнитель (цеолит); левая сторона треугольника показывает его содержание в смеси в процентах от массы вяжущего (цемента);

$x_2$  – мелкий заполнитель (песок); нижняя сторона треугольника показывает его массовое отношение к вяжущему (цементу);

$x_3$  – вода затворения; правая сторона треугольника показывает отношение массы воды к массе вяжущего (цемента).

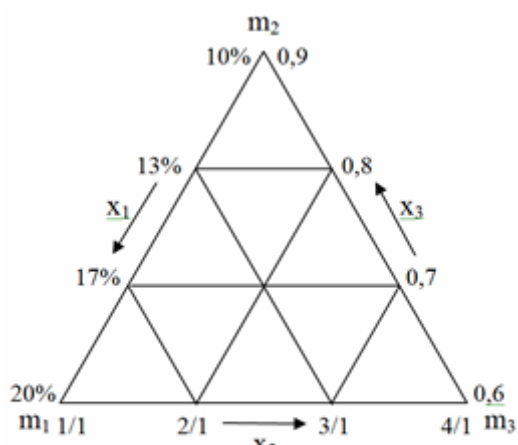


Рис.1. Треугольник состава трехкомпонентной

Данные факторы выбраны не случайно и обоснованы [9, 10].

Построение и изучение модели процесса сводилось к получению зависимости прочности материала от его фрактальной размерности. Удобнее всего количественную зависимость между большим числом изменяемых параметров записать с помощью полинома Шеффе. Для системы из трех компонентов:

$$Y = A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_{12}x_1x_2 + A_{13}x_1x_3 + A_{23}x_2x_3 + A_{1-2}x_1x_2(x_1 - x_2) + A_{1-3}x_1x_3(x_1 - x_3) + A_{2-3}x_2x_3(x_2 - x_3) + A_{123}x_1x_2x_3$$

где:  $x_1, x_2, x_3$  – варьируемые компоненты;

$A_1, A_2, A_3, A_{12}, A_{13}, A_{23}, A_{1-2}, A_{1-3}, A_{2-3}, A_{123}$  – коэффициенты регрессии.

Самая главная часть исследования – регрессионный анализ модели, который определяет математическую модель изучаемого экспериментального процесса. Она линейна относительно параметров и представляет собой законченный степенной ряд. В ходе регрессионного анализа по данным эксперимента рассчитываются численные параметры, производится статистический анализ, вычисляются статистические значимые оценки истинных коэффициентов полинома.

Практическая часть исследования состояла в изготовлении образцов материала согласно матрице планирования (табл.2) и их испытании.

Фрактальную размерность вычисляли по методу наложения сеток с различными размерами ячейки на фотографию микроструктуры образца по методике, использованной в ранее проведенном исследовании [8].

Прочность образцов проверяли при помощи испытаний на сжатие на гидравлическом прессе по методике ГОСТ 10180-2012.

Обработка результатов позволила вычислить коэффициенты регрессии, входящие в уравнения фрактальной размерности  $D$  и прочности при сжатии  $R$  (табл.1), и записать эти уравнения (1) и (2).

Таблица 1

Параметр	Статистически значимые коэффициенты регрессии									
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_{12}$	$A_{13}$	$A_{23}$	$A_{1-2}$	$A_{1-3}$	$A_{2-3}$	$A_{123}$

$D$	0,708	0,936	0,770	0,063	-0,095	-0,270	1,161	0,275	-0,441	-0,410
$R$	3,177	2,723	2,616	1,235	0	0,801	0	0	0,833	-1,530

$$Y(D) = 0,708x_1 + 0,936x_2 + 0,770x_3 + 0,063x_1x_2 - 0,095x_1x_3 - 0,270x_2x_3 + 1,161x_1x_2(x_1 - x_2) + 0,275x_1x_3(x_1 - x_3) - 0,441x_2x_3(x_2 - x_3) - 0,410x_1x_2x_3$$

$$Y(R) = 3,177x_1 + 2,723x_2 + 2,616x_3 + 1,235x_1x_2 - 0,470x_1x_3 + 0,801x_2x_3 + 0,093x_1x_2(x_1 - x_2) - 0,386x_1x_3(x_1 - x_3) + 0,833x_2x_3(x_2 - x_3) - 1,530x_1x_2x_3$$

Полученные уравнения дают возможность вычислить фрактальную размерность и прочность материала при любом содержании исходных сырьевых компонентов в смеси и построить кривые равных величин в пределах треугольника состава (рис.2).

Матрица планирования и результаты вычислений даны в таблице 2.

Таблица 2

Варьируемые факторы	№ точки плана									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X_1$	1	0	0	1/3	2/3	0	0	2/3	1/3	1/3
$X_2$	0	1	0	2/3	1/3	1/3	2/3	0	0	1/3
$X_3$	0	0	1	0	0	2/3	1/3	1/3	2/3	1/3
Исследуемые характеристики										
$D$	2,03	2,55	2,16	2,20	2,42	2,22	2,20	2,07	2,03	2,13
$R$ , МПа	23,98	15,22	13,68	23,14	27,16	15,92	18,68	19,12	16,80	20,14

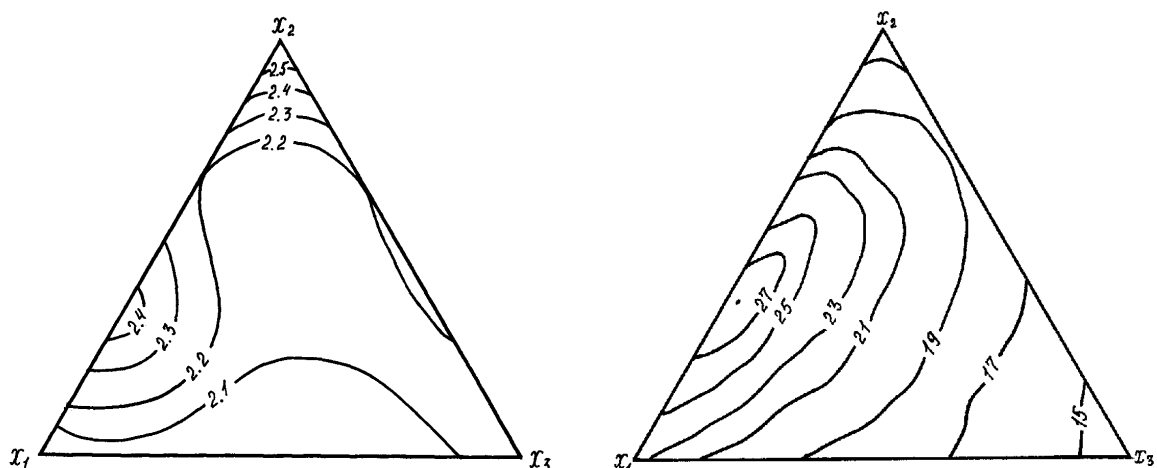


Рис.2. Изменение фрактальной размерности (слева) и прочности при сжатии, МПа, (справа) в пределах поля эксперимента

1)

(2)

Совместное решение полиномиальных уравнений (1) и (2) позволило построить график зависимости между прочностью и фрактальной размерностью (рис.3).

Анализируя полученный результат, можно утверждать, что между прочностью материала и его фрактальной размерностью существует определенная зависимость. Прочность цементных композитов оказывается тем больше, чем меньше фрактальная размерность. Это можно объяснить тем, что при  $D=2$  (2 – топологическая размерность плоскости) мы имеем чистый (бездефектный) материал, в структуре которого площадь пор равна

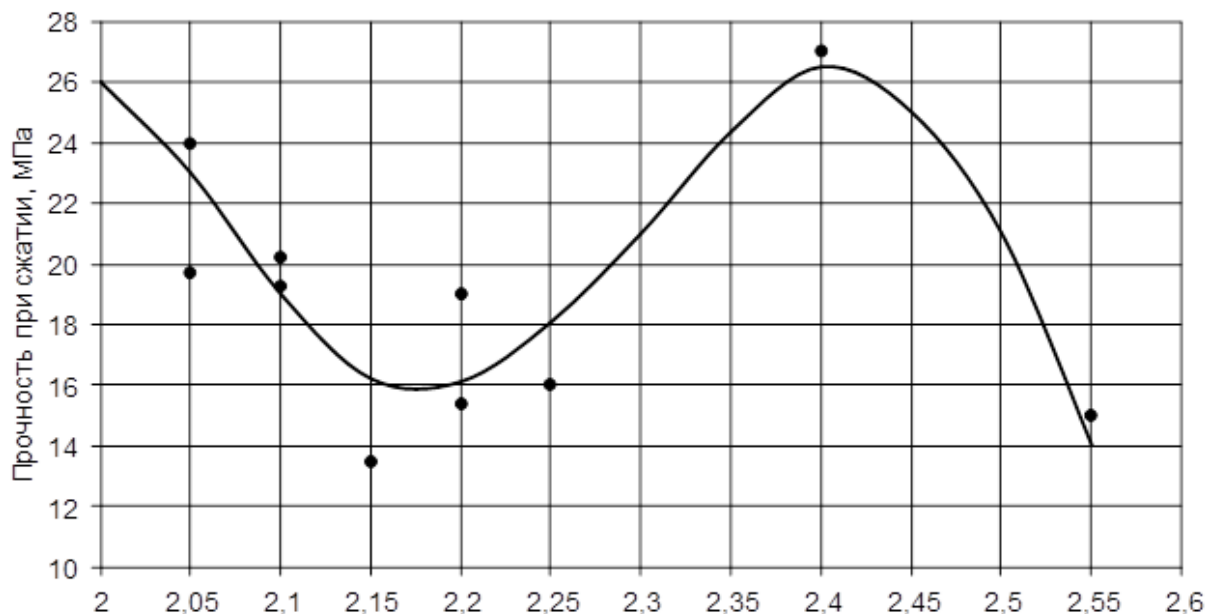


Рис.3. Зависимость между фрактальной размерностью и прочностью при сжатии (точками показаны экспериментальные данные, линией – решение системы полиномиальных уравнений)

нулю. С увеличением объема пор накапливаются дефекты в структуре материала, фрактальная размерность возрастает, и прочность падает. Рост прочности в диапазоне  $D=2,30\div 2,45$  предположительно связан с изменением параметров дифференциальной пористости материала, например, таких, как показатель среднего размера пор и коэффициент однородности размера пор.

Также на результатах эксперимента может сказаться значение коэффициента микропористости, т.к. чем ниже разрешение изображения

микроструктуры, тем меньше вероятность обнаружения в ней микропор, и материал может восприниматься как почти бездефектный, что на самом деле может быть и не так. Подтвердить или опровергнуть эти предположения, можно только проведя дополнительные исследования параметров общей и дифференциальной пористости материала, например, методом изучения кинетики водопоглощения.

Таким образом, появляется интерес дальнейших исследований, данные которых позволят определить зависимости между прочностью, пористостью и фрактальной размерностью КСМ, и в будущем сократить объем лабораторных испытаний, а, следовательно, и расходы на их выполнение.

### Литература

1. Баженов Ю.М. Бетонополимеры. М.: Стройиздат, 1983. 472 с.
2. Шейкин А.Е., Чеховский Ю.В., Бруссер М.И. Структура и свойства цементных бетонов. М.: Стройиздат, 1979. 344 с.
3. Мандельброт Б. Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 392 с.
4. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. New York: W.H. Freeman And Company, 1982. 468 p.
5. Feder J. Fractals. Springer Science+Business Media, LLC, 1988. 284 p.
6. Peitgen H.-O., Richter P.H. Beauty of Fractals: Images of Complex Dynamical Systems. Berlin etc., Springer-Verlag, 1986. 199 p.
7. Вайнер М.И. О некоторых характерных чертах структуры однородных пористых сред // Известия АН СССР, Механика. 1965. №5. С. 166-168.
8. Макаров Ю.А., Терешкин И.П. Исследование фрактальной размерности наполненных цементных композитов // Инженерный вестник

Дона, 2018, №2. URL: [ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD\\_137\\_Makarov.pdf\\_fcbe515eda.pdf](http://ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_137_Makarov.pdf_fcbe515eda.pdf).

9. Макаров Ю.А. Химическое сопротивление бетонополимеров: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.05. Саранск, 2000. 211 с.

10. Макаров Ю.А., Терешкин И.П. Применение цеолитсодержащих пород для изготовления растворов на минеральных вяжущих // Альманах современной науки и образования. 2013. №11(78). С. 102-105.

### References

1. Bazhenov Y.M. Betonopolimery [Concrete polymers]. Moskva: Stroyizdat, 1983. 472 p.

2. Sheikin A.E., Chehovskiy Y.V., Brusser M.I. Struktura i svoystva cementnykh betonov [Structure and properties of cement concretes]. Moskva: Stroyizdat, 1979. 344 p.

3. Mandelbrot B. Fraktaly i haos. Mnozhestvo Mandelbrota i drugie chudesa [Fractals and Chaos. The Mandelbrot Set and Other Miracles]. Izhevsk: NIC «Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika», 2009. 392 p.

4. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. New York: W.H. Freeman And Company, 1982. 468 p.

5. Feder J. Fractals. Springer Science+Business Media, LLC, 1988. 284 p.

6. Peitgen H.-O., Richter P.H. Beauty of Fractals: Images of Complex Dynamical Systems. Berlin etc., Springer-Verlag, 1986. 199 p.

7. Vajner M.I. Izvestiya AN SSSR, Mechanica. 1965. №5. pp. 166-168.

8. Makarov Y.A., Tereshkin I.P. Inzenernyj vestnik Dona, 2018, №2. URL: [ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD\\_137\\_Makarov.pdf\\_fcbe515eda.pdf](http://ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_137_Makarov.pdf_fcbe515eda.pdf).

9. Makarov Y.A. Himicheskoe soprotivlenie betonopolimerov [Chemical Resistance of Concrete Polymers]: Diss. ...Cand. Sciences: 05.23.05. Makarov Yuri Alekseevich. Saransk, 2000. 211 p.



10. Makarov Y.A., Tereshkin I.P. Almanah sovremennoi nauki i obrazovaniya. 2013. №11(78). pp. 102-105.