

## Реконструкция переменного коэффициента теплопроводности функционально-градиентного цилиндра

*С.А. Нестеров*

*Южный математический институт – филиал ВНЦ РАН, Владикавказ*

**Аннотация:** Исследуется обратная задача идентификации переменного коэффициента теплопроводности конечного цилиндра. Прямая задача формулируется в слабой постановке и решается в конечно-элементном пакете FreeFem++. Для решения обратной задачи построена проекционно-итерационная схема. Коэффициент теплопроводности представлен в виде суммы начального приближения и функции-поправки, заданной в виде разложения по системе полиномов. На каждом этапе итерационного процесса вычисляются коэффициенты разложения из решения системы алгебраических уравнений, полученной при алгебраизации операторного уравнения 1-го рода. Представлены результаты вычислительных экспериментов по восстановлению различных двумерных законов изменения коэффициента теплопроводности.

**Ключевые слова:** функционально-градиентный цилиндр, конечно-элементный пакет FreeFem++, идентификация, коэффициент теплопроводности, обратная задача, итерационно-проекторный подход, операторное уравнение.

### Введение

В настоящее время, для увеличения термоустойчивости объектов к высокотемпературным воздействиям все шире применяются функционально-градиентные материалы (ФГМ) – композиционные материалы, свойства которых непрерывно изменяются по пространственным координатам [1].

Для того чтобы дать оценку соответствия реальных и проектных законов изменения теплофизических характеристик необходимо применить методы неразрушающего контроля, опирающиеся в случае неоднородных тел на исследование коэффициентных обратных задач теплопроводности (КОЗТ). На данный момент основными методами решения обратных задач являются: минимизация функционала невязки одним из градиентных методов [2, 3], использование нейросетевых технологий [4, 5], итерационный алгоритм ньютоновского типа [6, 7]. Однако задача идентификации коэффициента теплопроводности в случае, когда он является переменным, остается неисследованной.

---

## Постановка прямой и обратной задач

Прямая задача теплопроводности для неоднородного конечного полого цилиндра с поверхностями  $r = r_1$ ,  $r = r_2$  и высотой  $2h$  состоит в нахождении распределения температуры  $T$  в любой момент времени. Пусть на внутренней поверхности цилиндра задана температура, на внешней поверхности – тепловой поток, торцы теплоизолированы. Постановка безразмерной задачи теплопроводности имеет вид [8]:

$$\frac{1}{\xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \xi_1 \bar{k}(\xi_1, \xi_2) \frac{\partial W}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \bar{k}(\xi_1, \xi_2) \frac{\partial W}{\partial \xi_2} \right) = \bar{c}(\xi_1, \xi_2) \frac{\partial W}{\partial \tau},$$
$$\xi_0 \leq \xi \leq 1, \quad -H \leq \xi_2 \leq H, \quad \tau > 0, \quad (1)$$

$$W(\xi_0, \xi_2, \tau) = 0, \quad -\bar{k}(\xi_0, \xi_2) \frac{\partial W}{\partial \xi_1}(\xi_0, \xi_2, \tau) = Q(\xi_2, \tau), \quad \frac{\partial W}{\partial \xi_2}(\xi_1, \pm H, \tau) = 0, \quad (2)$$

$$W(\xi_1, \xi_2, 0) = 0, \quad (3)$$

где  $\xi_1 = \frac{r}{r_2}$ ,  $\xi_2 = \frac{z}{r_2}$ ,  $\xi_0 = \frac{r_1}{r_2}$ ,  $H = \frac{h}{r_2}$ ,  $\bar{k} = \frac{k}{k_0}$ ,  $\bar{c} = \frac{c}{c_0}$ ,  $W = \frac{k_0 T}{q_0 r_2}$ ,  $\tau = \frac{k_0 t}{c_0 r_2^2}$ ,  $Q = \frac{q}{q_0}$ .

Обратная задача состоит в реконструкции коэффициента теплопроводности из (1) - (3) по температуре внешней поверхности, измеренной на некотором временном отрезке:

$$W(1, \xi_2, \tau) = f(\xi_2, \tau), \quad \tau \in [c, d]. \quad (4)$$

## Решение прямой задачи в пакете FreeFem++

Решение прямой задачи (1) - (3) реализовано в конечно-элементном пакете FreeFem++ [9], опираясь на ее слабую постановку. Для этого уравнение теплопроводности (1) представим в виде:

$$\nabla \cdot (\bar{k} \nabla W) = \bar{c} \frac{\partial W}{\partial \tau}. \quad (5)$$

Если умножить уравнение (5) на пробную функцию  $v$ , такую, что  $v|_{s_T} = 0$  и проинтегрировать результат по области  $V$ , применяя теорему

Остроградского-Гаусса, то после некоторых преобразований, получим слабую постановку:

$$\iiint_V \left( \bar{k} \nabla W \cdot \nabla v + \bar{c} \frac{\partial W}{\partial \tau} v \right) dV = \iint_{S_q} Q v dS_q, \quad (6)$$

которая в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$2\pi \iint_S \left( \bar{k}(\xi_1, \xi_2) \left( \frac{\partial W}{\partial \xi_1} \frac{\partial v}{\partial \xi_1} + \frac{\partial W}{\partial \xi_2} \frac{\partial v}{\partial \xi_2} \right) + \bar{c}(\xi_1, \xi_2) \frac{\partial W}{\partial \tau} v \right) \xi_1 d\xi_1 d\xi_2 = 2\pi \int_{l_q} Q v d\xi_2. \quad (7)$$

Для решения задачи (1)-(3) составлена программа на языке FreeFem++. При этом от цилиндрических координат переходят к декартовым координатам на плоской области в виде прямоугольника  $S = [\xi_0, 1] \times [-H, H]$ , описывающего половину продольного сечения цилиндра, а производная по времени заменяется ее конечно-разностной аппроксимацией.

В качестве примера рассмотрен двумерный ФГМ, созданный из 4 разных материалов: металлов  $Ni$  (вещество 1),  $Al$  (вещество 2), которые достигают 100% своей концентрации на внутренней поверхности цилиндра  $\xi_1 = \xi_0$  соответственно в точках  $(\xi_0, -H)$  и  $(\xi_0, H)$ ; керамик  $TiC$  (вещество 3),  $Al_2O_3$  (вещество 4), которые достигают 100% своей концентрации на внешней поверхности цилиндра  $\xi_1 = 1$  соответственно в точках  $(1, -H)$  и  $(1, H)$ . Пусть  $\bar{k}_i$  – безразмерные значения коэффициента теплопроводности;  $V_i$  – объемные фракции  $i$ -го вещества;  $l_1, l_2$  – параметры, характеризующие степень неоднородности свойств по координатам  $\xi_1$  и  $\xi_2$  соответственно. Тогда коэффициент теплопроводности имеет вид [10]:

$$\bar{k}(\xi_1, \xi_2) = \bar{k}_1 V_1(\xi_1, \xi_2) + \bar{k}_2 V_2(\xi_1, \xi_2) + \bar{k}_3 V_3(\xi_1, \xi_2) + \bar{k}_4 V_4(\xi_1, \xi_2), \quad (8)$$

$$\text{где } V_1(\xi_1, \xi_2) = \left( 1 - \left( \frac{\xi_1 - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^{l_1} \right) \left( 1 - \left( \frac{\xi_2 + H}{2H} \right)^{l_2} \right), \quad V_2(\xi_1, \xi_2) = \left( 1 - \left( \frac{\xi_1 - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^{l_1} \right) \left( \frac{\xi_2 + H}{2H} \right)^{l_2},$$

$$V_3(\xi_1, \xi_2) = \left( \frac{\xi_1 - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^{l_1} \left( 1 - \left( \frac{\xi_2 + H}{2H} \right)^{l_2} \right), \quad V_4(\xi_1, \xi_2) = \left( \frac{\xi_1 - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^{l_1} \left( \frac{\xi_2 + H}{2H} \right)^{l_2}.$$

Изучена зависимость температуры на внешней поверхности  $Ni-Al-TiC-Al_2O_3$  цилиндра при различных значениях параметров  $l_1, l_2$ . Расчеты проводились на сетке  $30 \times 100$  при  $\xi_0 = 0,7, H = 1, Q = \tau e^{-\tau} (1 - \xi_2^2)$ . Результат вычисления зависимости температуры от времени в точке  $(1; 0,5)$  представлен на рис. 1, где сплошной линией изображена температура при однородном цилиндре, точками – при параметрах  $l_1 = l_2 = 1$  в (8), пунктиром – при  $l_1 = l_2 = 2$  в (8).

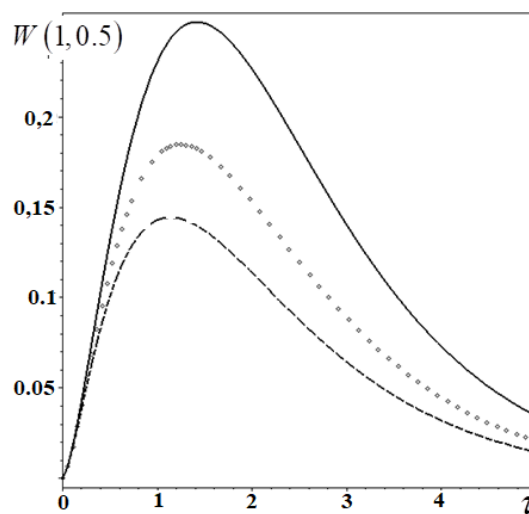


Рис. 1. – Изменение температуры цилиндра от времени в точке  $(1; 0,5)$ .

### Схема решения обратной задачи

Рассмотрим два состояния системы, которым соответствует два набора характеристик: а)  $W^{(1)}, \bar{k}^{(1)}, \bar{c}$ ; б)  $W^{(2)}, \bar{k}^{(2)}, \bar{c}$ .

Найдем разность слабых постановок (6), записанных для каждого состояния, положив  $v^{(1)} = W^{(2)}, v^{(2)} = W^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left( (\bar{k}^{(2)} - \bar{k}^{(1)}) \nabla W^{(1)} \cdot \nabla W^{(2)} + \bar{c} \frac{\partial W^{(2)}}{\partial \tau} W^{(1)} - \bar{c} \frac{\partial W^{(1)}}{\partial \tau} W^{(2)} \right) dV = \\ & = \iint_{S_q} Q (W^{(1)} - W^{(2)}) dS_q. \end{aligned} \quad (9)$$

Полагая в (9)  $\bar{k}^{(1)} = \bar{k}^{(n-1)}$ ,  $W^{(1)} = W^{(n-1)}$ ,  $\bar{k}^{(2)} = \bar{k}^{(n-1)} + \delta\bar{k}^{(n-1)}$ ,  $W^{(2)} = W^{(n-1)} + \delta W^{(n-1)}$ , ограничившись только линейными слагаемыми и учитывая информацию (7), получим операторное уравнение 1-го рода

$$\iiint_V (\delta\bar{k}^{(n-1)} \nabla W^{(n-1)} \cdot \nabla W^{(n-1)}) dV = \iint_{S_q} Q(f - W^{(n-1)}) dS_q, \quad (10)$$

которое в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\begin{aligned} & 2\pi \iint_S \delta\bar{k}^{(n-1)}(\xi_1, \xi_2) \left( \left( \frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial \xi_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial \xi_2} \right)^2 \right) \xi_1 d\xi_1 d\xi_2 = \\ & = 2\pi \int_{l_q} Q(f(\xi_2, \tau) - W^{(n-1)}(1, \xi_2, \tau)) d\xi_2, \quad \tau \in [c, d]. \end{aligned} \quad (11)$$

Поиск начального приближения  $\bar{k}^{(0)}$  происходит в виде константы на сетке значений  $\bar{k}_- \leq \bar{k}^{(0)} \leq \bar{k}_+$ , путем минимизации функционала невязки

$$J = \sqrt{\sum_{j=1}^N \int_{-H}^H (f(\xi_2, \tau_j) - W(1, \xi_2, \tau_j))^2 d\xi_2}. \quad (12)$$

Затем происходит уточнение искомой функции по формуле  $\bar{k}^{(n)} = \bar{k}^{(n-1)} + \delta\bar{k}^{(n-1)}$ , где  $\delta\bar{k}^{(n-1)}$  находят из решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода (14) с неотрицательным ядром.

.Алгебраизация интегрального уравнения (11) состоит в аппроксимации поправок в виде разложения по системе линейно независимых функций:

$$\delta\bar{k}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=1}^6 a_m \psi_m(\xi_1, \xi_2), \quad (13)$$

где  $\psi_1 = 1$ ,  $\psi_2 = \xi_1$ ,  $\psi_3 = \xi_2$ ,  $\psi_4 = \xi_1 \xi_2$ ,  $\psi_5 = \xi_1^2$ ,  $\psi_6 = \xi_2^2$ .

Подставив (13) в (11), для нахождения коэффициентов разложения  $a_m$ ,  $m=1..6$  имеем плохо обусловленную систему линейных алгебраических уравнений, решение которой строится с помощью метода регуляризации А.Н. Тихонова. Итерационный процесс останавливается, когда значение функционала невязки (12) станет меньше  $10^{-4}$ , либо количество итераций превысит  $n = 30$ .

## Результаты реконструкции коэффициента теплопроводности

Проведены вычислительных экспериментов по реконструкции двумерных законов изменения коэффициента теплопроводности. В расчетах принято:  $\xi_0 = 0,5$ ,  $H = 1$ ,  $Q = \tau e^{-\tau} (1 - \xi_2^2)$ ,  $\tau \in (c;d) = (0,1;0,65)$ ,  $N = 4$ . Погрешность реконструкции функций во внутренних точках не превысила 10%.

Результаты реконструкции коэффициента теплопроводности в сечении  $\xi_2 = 0,5$  представлены на рис. 2 (на рис. 2а – функции (8) при  $l_1 = l_2 = 2$ , на рис. 2б – функции  $\bar{k}(\xi_1, \xi_2) = 0,3e^{1,25\xi_1^2 + 0,5\xi_2}$ ). Здесь сплошной линией представлены точные функции, в виде точек – восстановленные.

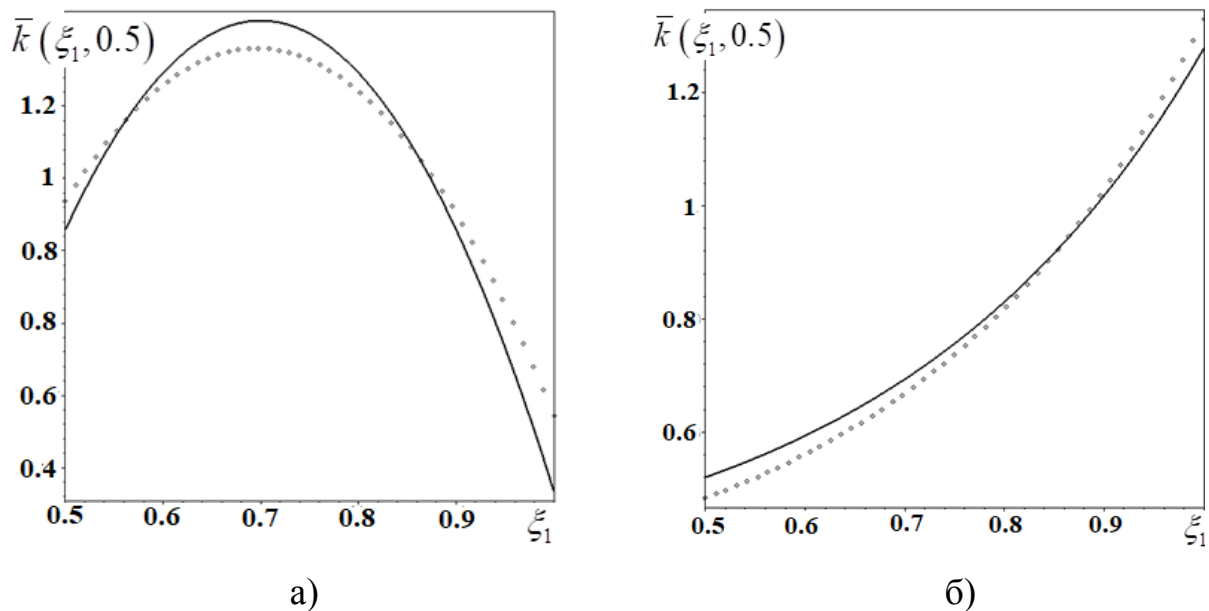


Рис. 2. – Идентификация коэффициента теплопроводности в сечении

$\xi_2 = 0,5$ : а) закона (8) при  $l_1 = l_2 = 2$ ; б)  $\bar{k}(\xi_1, \xi_2) = 0,3e^{1,25\xi_1^2 + 0,5\xi_2}$ .

## Литература

1. Dai H.L., Rao Y.N., Dai T. A review of recent researches on FGM cylindrical structures under coupled physical interactions, 2000–2015 // Composite Structures. 2016. Vol. 152. Pp. 199–225.

2. Huang C.H., Chin S.C. A two-dimensional inverse problem in imaging the thermal conductivity of a non-homogeneous medium // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2000. Vol. 43(22). Pp. 4061–4071.

3. Cao K., Lesnic D. Determination of space-dependent coefficients from temperature measurements using the conjugate gradient method // *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 2018. Vol. 34. № 4. Pp. 1370–1400.

4. Борисова Е.В., Васильев П.В. Идентификация трещиноподобных дефектов в составных упругих телах сложной геометрии // *Инженерный вестник Дона*. 2014. №4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2671](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2671)

5. Курченко Н.С., Алексейцев А.В. Идентификация силовых воздействий на несущую систему с использованием нейросетевых технологий // *Инженерный вестник Дона*. 2023. №9. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n9y2023/8656](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n9y2023/8656)

6. Zhou Q.B., Lu Y.K., Zhang S.Y., Cheng J.C., Shui X.J. Two-dimensional reconstruction theory of thermal conductivity profiles based on the thermal wave technique // *Journal of Applied Physics*. 2002. Vol. 92. № 7. Pp. 4088–4094.

7. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Коэффициентные обратные задачи термомеханики. Ростов-на-Дону – Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2022. 176 с.

8. Amiri Delouei A. Unsteady Temperature Distribution in a Finite Functionally Graded Cylinder // *International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering*. 2017. Vol. 11. № 9. Pp. 1600–1603.

9. Жуков М.Ю., Ширяева Е.В. Решение задач математической физики при помощи пакета конечных элементов FreeFem++. Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2005. 255 с.

10. Nemat-Alla M. Reduction of thermal stresses by composition optimization of two-dimensional functionally graded materials // *Acta Mechanica*. 2009. Vol. 208. Pp. 147–161. DOI: 10.1007/s00707-008-0136-1

---

## References

1. Dai H.L., Rao Y.N., Dai T. Composite Structures. 2016. vol. 152. pp. 199–225.
2. Huang C.H., Chin S.C. International Journal of Heat and Mass Transfer. 2000. vol. 43(22). pp. 4061–4071
3. Cao K., Lesnic D. Numerical Methods for Partial Differential Equations. 2018. vol. 34. № 4. pp. 1370–1400.
4. Borisova E.V., Vasilyev P.V. Inzhenernyj vestnik Dona. 2014. №4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2671](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2671)
5. Kurchenko N.S., Alexeytchev A.V. Inzhenernyj vestnik Dona. 2023. №9. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n9y2023/8656](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n9y2023/8656)
6. Zhou Q.B., Lu Y.K., Zhang S.Y., Cheng J.C., Shui X.J. Journal of Applied Physics. 2002. vol. 92. № 7. pp. 4088–4094.
7. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Koeffitsiyentnyye obratnyye zadachi termomekhaniki. 2-ye izd., ispr. i dop. [Coefficientinverse problems of thermomechanics]. Rostov na Donu – Taganrog: Izd. YuFU. 2022. 176 p.
8. Amiri Delouei A. International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering. 2017. vol. 11. № 9. pp. 1600–1603.
9. Zhukov M.Yu., Shiryayeva E.V. Resheniye zadach matematicheskoy fiziki pri pomoshchi paketa konechnykh elementov FreeFem++ [Solving problems of mathematical physics using the finite element package FreeFem++]. Rostov na Donu. Izd. YuFU. 2005. 255 p.
10. Nemat-Alla M. Acta Mechanica. 2009. vol. 208. pp. 147–161.

**Дата поступления: 8.10.2024**

**Дата публикации: 21.11.2024**