

## Алиасинг-граммы для экспресс-контроля адекватности выбора интервала дискретизации измеренного сигнала

*А.В. Седов, О.О. Пушкарева*

*Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ)  
имени М.И. Платова, Новочеркасск*

**Аннотация:** Предложен новый математический аппарат контроля адекватности выбора интервала дискретизации сигнала с точки зрения учета основных высокочастотных составляющих и выявления возможностей его увеличения. Он базируется на построении специальных алиасинг-грамм по измеренным отсчетам сигнала. Алиасинг-граммы представляют собой графики среднеквадратических отклонений амплитудных спектров условно эталонного дискретного сигнала, заданного с наибольшей частотой дискретизации и вспомогательных дискретных сигналов, полученных на том же интервале наблюдения, но с меньшими частотами дискретизации. Анализируя подобные графики, легко выявить частоты дискретизации, приводящие к появлению эффекта алиасинга в случае дискретизации, а, следовательно, к искажению спектра сигнала. Для ускорения и упрощения построения алиасинг-грамм предложено в качестве вспомогательных использовать сигналы, полученные из эталонного путем прореживания. Показано, что данный аппарат эффективен и в случае возникновения эффекта растекания спектра. Он может быть применен в самообучаемых измерительных системах.

**Ключевые слова:** интервал дискретизации, алиасинг, амплитудный спектр, алиасинг-грамма, прореживание отсчетов, растекание спектра.

### Введение

Реализация технологий измерения сигналов  $x(t)$  в системах контроля, диагностики и управления в первую очередь связана с выбором адекватного процессу интервала измерения  $T = T_s / N$  отсчетов  $x[kT] = x(kT)$ ,  $k = \overline{0, N-1}$  сигнала. При этом зачастую сигнал  $x(t)$  рассматривают на фиксированном интервале наблюдения  $T_s$ , а отсчеты  $x[kT]$  используют равноотстоящие, измеряемые с частотой  $f_s = 1/T$  [1,2]. Адекватность выбора интервала  $T$  определяется как возможностью точного восстановления исходного измеряемого сигнала  $x(t)$  по измеренным отсчетам  $x[kT]$ ,  $k = \overline{0, N-1}$ , так и измерением минимально возможного числа отсчетов  $N$ , чтобы упростить процесс обработки и уменьшить объем измеренных избыточных данных [3]. Выбор интервала дискретизации  $T$  контролируют по возникновению

алиасинга или наложения частотных составляющих в спектре сигнала  $x[kT]$  [3,4]. При этом на практике зачастую для оценки адекватности выбора  $T$  требуется минимальное число повторений измерений сигнала, а в ряде случаев повторения измерений вообще недопустимы [5,6].

### Постановка задачи

Алиасинг можно трактовать, как возникающую неразличимость или наложение нескольких частотных составляющих в дискретном сигнале  $x[kT]$  при конкретных значениях интервала  $T$ , которые в исходном измеряемом сигнале  $x(t)$  вполне различимы [6]. При этом искажается спектр сигнала  $x[kT]$  и точное восстановление  $x(t)$  по дискретным отсчетам  $x[kT]$  становится невозможным [6,7]. Искажение проявляется в полосах частот  $[2f_s - f_{\max} \pm j \cdot f_s; f_{\max} \pm j \cdot f_s]$ ,  $j \in Z$ , следующих друг за другом с интервалом  $f_s$  по частоте [8]. В случае отсутствия искажений спектра значения амплитуд гармоник в указанных полосах частот являются условно нулевыми.

В качестве индикатора алиасинга возможно использование условий теоремы отсчетов [2,3]:  $T < 1/(2f_{\max})$ , где  $f_{\max}$  - граничная частота сигнала  $x(t)$ , то есть частота выше которой гармонические составляющие имеют условно нулевую амплитуду. Однако, при этом возникают трудности определения  $f_{\max}$ , так как не всегда просто определить, какую амплитуду принять за условно нулевую, особенно в случае, если имеется еще и эффект растекания спектра [9]. Этот эффект проявляется появлением в сигнале большого числа «фиктивных» ненулевых гармоник, из-за усечения интервалом  $T_s$  частотной составляющей сигнала  $x(t)$ , период которой не кратен  $T_s$  [10]. Данный эффект затрудняет выявление алиасинга и в случае анализа амплитуд гармоник в указанных выше полосах частот искажения спектра. В статье предлагается другой подход выявления алиасинга на основе построения алиасинг-грамм.

---

## Теоретическая часть

Под *алиасинг-граммой* будем понимать график зависимости средней нормы разности (СНР) амплитудных спектров

$$\Delta_{N_1} = \|A_N(f_n) - A_{N_1}(f_n)\|_2 / (N_1/2) = \sqrt{\sum_{n=1}^{N_1/2} (A_N(f_n) - A_{N_1}(f_n))^2} / (N_1/2)$$

от числа отсчетов  $N_1$  вспомогательного сигнала. В формуле приняты обозначения:  $A_N(f_n) = |X_N(f_n)| / (N/2)$  - амплитудный спектр эталонного дискретного сигнала  $x[kT]$ , полученного из  $x(t)$ , с числом отсчетов  $N$  на интервале наблюдения  $T_s$  и комплексным спектром  $X_N(f_n)$ ;  $A_{N_1}(f_n) = |X_{N_1}(f_n)| / (N_1/2)$  - то же, но вспомогательного сигнала  $x_1[kT]$  полученного также из  $x(t)$  при числе отсчетов  $N_1 < N$ , измеренных на интервале наблюдения  $T_s$ . В качестве условно эталонного сигнала  $x[kT]$  используют тот, со значением  $N$ , для которого предположительно выполняется условие теоремы отсчетов.

Осуществим построение алиасинг-граммы сигнала  $x(t)$ , заданного на интервале наблюдения  $T_s = 1$  с, являющимся периодом. Амплитудный спектр сигнала  $x(t)$  содержит 12 ненулевых гармоник, причем номер наивысшей по частоте  $n_{max} = 16$ , то есть граничная частота сигнала  $f_{max} = n_{max} / T_s = 16$  Гц. Исходя из условия теоремы отсчетов  $N > 2f_{max} T_s$ , число отсчетов на интервале наблюдения должно быть больше 32, при этом будет отсутствовать алиасинг.

В качестве эталонного выберем сигнал  $x[kT]$  при  $N=100$  отсчетов. На рис.1-а представлена классическая алиасинг-грамма для случая изменения  $N_1$  от 5 до 45 отсчетов с шагом 5 на интервале наблюдения. При изменении  $N_1$  от 35 до 45 алиасинг не проявляется, так как значение алиасинг-граммы равно нулю (что соответствует и условию теоремы отсчетов). Следовательно, число отсчетов сигнала  $x[kT]$  можно без потери точности восстановления уменьшить до 32-35 на интервале наблюдения, то есть, в три раза.

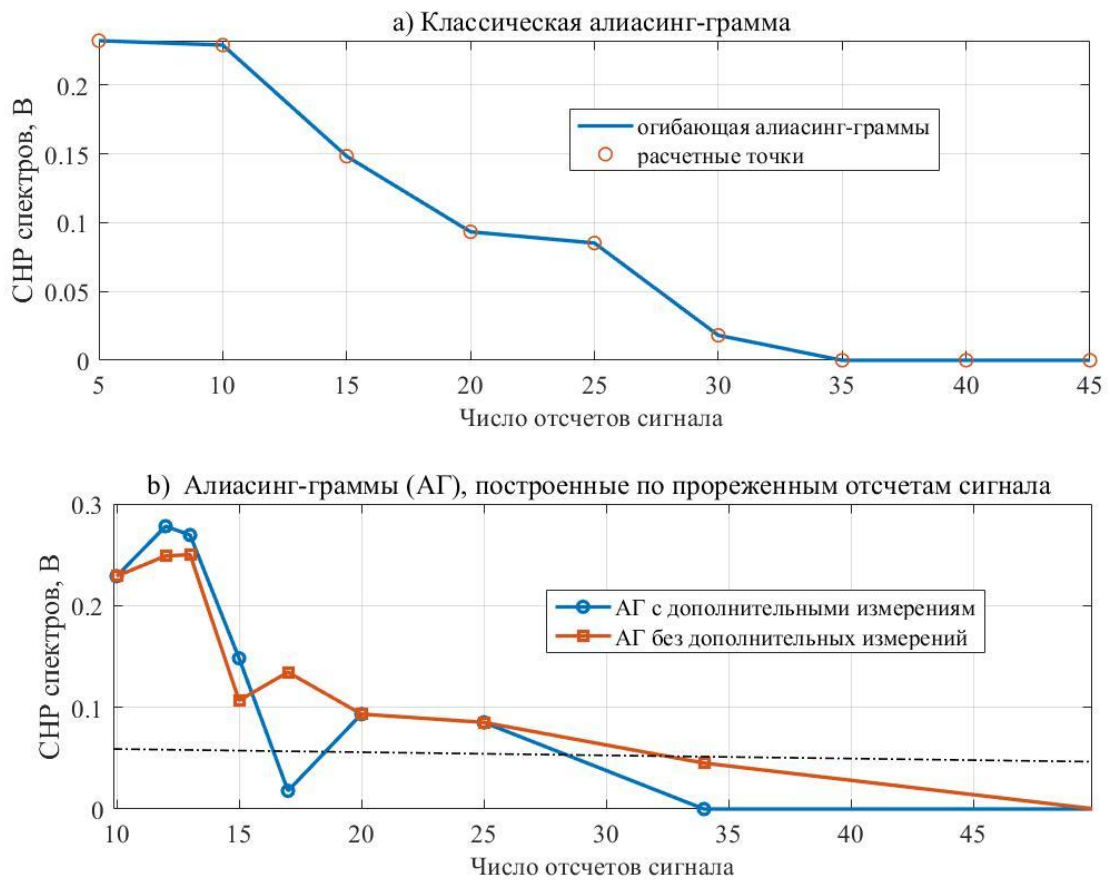


Рис. 1. – Алиасинг-граммы сигнала  $x(t)$

При построении классической алиасинг-граммы рис.1-а для каждого нового  $N_1$  осуществлялся пересчет шага  $T$  и дополнительно проводились измерения сигнала с новым шагом в других узлах. Это резко затрудняло процесс построения алиасинг-граммы. Поэтому предложено не осуществлять дополнительные измерения  $x_1[kT]$ , а формировать  $x_1[kT]$  из эталонного сигнала путем прореживания отсчетов эталонного сигнала с  $N_1 = \{N/2\}, \{N/3\}, \{N/4\}, \{N/5\}, \dots$ , где  $\{\dots\}$  - округление до целого. Алиасинг-грамма в случае прореживания отсчетов приведена на рис. 1-б. Для подтверждения возможности использования такой замены приведены два графика для указанных значений  $N_1$ : для случая построения классической алиасинг-граммы с дополнительными измерениями и для случая прореживания эталонного сигнала без дополнительных измерений.

Оба графика на рис.1-в имеют близкий вид и позволяют сделать вывод об отсутствии эффекта алиасинга для  $N_1 > 35$ , что совпадает с выводом, сделанным по классической алиасинг-грамме с повторными измерениями рис.1-а. Таким образом, имеем достаточно точную оценку классической алиасинг-граммы без дополнительных измерений сигнала в иных узлах. Кроме того, такая оценка имеет монотонный убывающий вид, как и классическая алиасинг-грамма. Эффективность алиасинг-грамм сохраняется и в случае растекания спектра сигнала.

Данный подход контроля адекватности выбора интервала дискретизации сигнала может быть применен в адаптивных обучаемых системах измерения.

### Литература

1. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.:Питер, 2002. 608 с.
2. Седов А.В. Моделирование объектов с дискретно-распределенными параметрами. М.:Наука, 2010. 438 с.
3. Оппенгейм А., Шаффер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2012. 1048 с.
4. Girod B., Rabenstein R., Stenger A. Signals and Systems. New York, John Wiley, 2009. 592 p.
5. Gan W.-S., Kuo M.S. Embedded Signal Processing with the Micro Signal Architecture. New York, John Wiley, 2007. 507 p.
6. Kuo M.S., Lee B.H. Real-Time Digital Signal Processing. New York, John Wiley, 2001. 503 p.
7. Mitra S.K. Digital signal processing. A Computer-Based Approach. New York, McGraw-Hill, 2000. 879 p.
8. Proakis J.G., Manolakis D.G. Digital Signal Processing. Principles, Algorithms, and Applications. New York, Prentice-Hill, 2000. 518 p.
9. Sedov A. V. The concept and the principle of the diagnostic observability of the object in problems of monitoring and non-destructive testing. IOP Conference,

2017. Vol. 177. # UNSP 012034. Pp. 115–120.

10. Buck J.R., Daniel M.M., Singer A.C. Computer Explorations in Signals and Systems. Using Matab. Prentice-Hill, 1997. 218 p.

### References

1. Sergienko A.B. Tsifrovaya obrabotka signalov [Digital signal processing]. SPb.: Piter, 2002. 608 p.

2. Sedov A.V. Modelirovanie ob"ektov s diskretno-raspredelennymi parametrami [Modeling of objects with discretely distributed parameters]. M.: Nauka, 2010. 438 p.

3. Oppengeym A., Shaffer R. Tsifrovaya obrabotka signalov [Digital signal processing]. M.: Tekhnosfera, 2012. 1048 p.

4. Girod B., Rabenstein R., Stenger A. Signals and Systems. New York, John Wiley, 2009. 592 p.

5. Gan W.-S., Kuo M.S. Embedded Signal Processing with the Micro Signal Architecture. New York, John Wiley, 2007. 507 p.

6. Kuo M.S., Lee B.H. Real-Time Digital Signal Processing. New York, John Wiley, 2001. 503 p.

7. Mitra S.K. Digital signal processing. A Computer-Based Approach. New York, McGraw-Hill, 2000. 879 p.

8. Proakis J.G., Manolakis D.G. Digital Signal Processing. Principles, Algorithms, and Applications. New York, Prentice-Hill, 2000. 518 p.

9. Sedov A. V. The concept and the principle of the diagnostic observability of the object in problems of monitoring and non-destructive testing. IOP Conference, 2017. Vol. 177. # UNSP 012034. Pp. 115–120.

10. Buck J.R., Daniel M.M., Singer A.C. Computer Explorations in Signals and Systems. Using Matab. Prentice-Hill, 1997. 218 p.

**Дата поступления: 28.12.2023    Дата публикации: 7.02.2024**

---