

Формирование частотного представления одномерного сигнала, инвариантного направлению обработки, на основе дискретного косинусного преобразования

А.Г. Шоберг

Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск

Аннотация: В статье исследуется влияние направления обработки данных на результаты дискретного косинусного преобразования (ДКП). На основе теории групп рассматриваются симметрии базисных функций ДКП, анализируются изменения, возникающие при смене направления обработки сигнала. Показано, что антисимметричные составляющие базиса меняют знак при обратном порядке отсчетов, в то время как симметричные остаются неизменными. Предложены модифицированные выражения для блочного ДКП, учитывающие изменение направления обработки. Экспериментально подтверждена инвариантность частотного состава преобразования к направлению обработки данных. Результаты демонстрируют возможность применения предложенного подхода для анализа сигналов произвольной природы, включая обработку изображений и сжатие данных.

Ключевые слова: Дискретные преобразования, базисные функции, инвариантность, симметрия, направление обработки, матричное представление, корреляция.

Введение

Современные методы цифровой обработки сигналов базируются на ряде общих принципов. В основные этапы обработки могут входить операции дискретизации, квантования, фильтрации, применения ортогональных преобразований и др. Независимо от природы сигналов, эффективная работа требует разработки оптимизированных алгоритмов, мощных вычислительных ресурсов и систем хранения [1].

Сжатие данных, проектирование цифровых фильтров, обработка речи, изображений и видео — это области, в которых преобразования различных видов оказали значительное влияние [2]. Реализуемые на практике дискретные преобразования переводят данные из временного или пространственного домена в другое пространство, которое в общем случае может рассматриваться как частотное. Среди важных требований к таким преобразованиям [3] присутствуют: реализуемость; эффективность (связано с минимизацией арифметических операций, прежде всего сложных, таких как

умножение); обратимость (возможность восстановления с необходимой точностью) [4].

Вопросы обработки данных в частотном диапазоне используются в стеганографии [5, 6], синтезе сигналов [7] и др. областях [8]. В последнее время данный диапазон начинают применять в нейронных сетях [9-11].

Вопросы минимизации количества арифметических операций могут быть связаны в том числе с наличием инвариантности на основе симметрий.

В простом изложении «симметрия функций» - это свойство при котором график функций не меняется при определенных преобразованиях координат. Чаще всего рассматриваются преобразования относительно оси ординат или начала координат. Четная функция – **симметричная** относительно оси ординат. Нечетная функция – **антисимметричная** относительно начала координат. Если функция не является ни четной, ни нечетной, то у ней **отсутствует симметрия**. Здесь симметричность рассматривается, как синоним четности функции, а антисимметричность, как синоним нечетности.

Данная статья посвящена расширению возможностей применения симметрий для обработки данных в частотном диапазоне.

Обратимые преобразования в блочной форме

Преобразование X может быть представлено в виде матричного произведения квадратной матрицы W на вектор отсчетов x :

$$X = WX. \quad (1)$$

Каждый элемент квадратной матрицы преобразования в (1) состоит из значений, рассчитываемых с использованием номеров строк и столбцов

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \dots \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{0,0} & W_{0,1} & \dots & W_{0,N-1} \\ W_{1,0} & W_{1,1} & \dots & W_{1,N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N-1,0} & W_{N-1,1} & \dots & W_{N-1,N-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Используя оконную функцию можно выделять обрабатываемые фрагменты сигнала, к которым будут независимо применяться прямые и обратные преобразования.

Для произвольного количества блоков L получаем выражение на основе прямой суммы матриц:

$$\mathbf{X}_{0:L-1} = (\mathbf{W}' \oplus \mathbf{W}' \oplus \dots \oplus \mathbf{W}') \times \mathbf{x}_{0:L-1}, \quad (3)$$

где $\mathbf{X}_{0:L-1} = (\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{L-1})^T$ выходной вектор, каждый элемент которого $\mathbf{X}_i$ представляет собой вектор длиной N ;

$\mathbf{x}_{0:L-1} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{L-1})^T$ – вектор исходных данных, каждый элемент которого $\mathbf{x}_i$ представляет собой вектор длиной N .

Четность или нечетность L в выражении (3) не является существенным условием и в этом смысле L может иметь произвольное значение.

Дискретное косинусное преобразование в блочной форме

На основе теории групп, изучающих симметрии, в пределах блока одномерных данных можно рассмотреть два движения 0° и 180° . Поворот на 180° связан с изменением направления обработки, т.е. с изменением выборки отсчетов не от первого к последнему, а от последнего отсчета к первому. При этом в выражениях (1) или (2) возможны изменения выборки в вектор-столбце $\mathbf{x}$, или в строках матрицы преобразования $\mathbf{W}$. Эти изменения эквивалентны, что определяется свойствами матричного умножения. В связи с этим далее будем рассматривать только изменение направления обработки прежде всего в матрице преобразования, т.к. системы базисных функций в большинстве случаев хорошо изучены и формируются на основе аналитических зависимостей, обрабатываемые данные, получаемые от датчиков могут иметь различную физическую природу.

Если рассматривать дискретное косинусное преобразование (ДКП) система базисных функций будет записываться следующим образом [10].

Прямое ДКП будет иметь вид:

$$X(m) = \sqrt{\frac{2}{N}} C(m) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{\pi(2n+1)m}{2N}\right), \quad (4)$$

а обратное преобразование:

$$x(n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{m=0}^{N-1} C(m) X(m) \cos\left(\frac{\pi(2n+1)m}{2N}\right), \quad (5)$$

где $n = 0, \dots, N-1$, $m = 0, \dots, N-1$ – индексы;

$$C(m) = \begin{cases} 1, m \neq 0 \\ 1/\sqrt{2}, m = 0 \end{cases} \quad (6)$$

На рис. 1 представлены графические представления первых шести функций данного преобразования для 50-ти отсчетов.

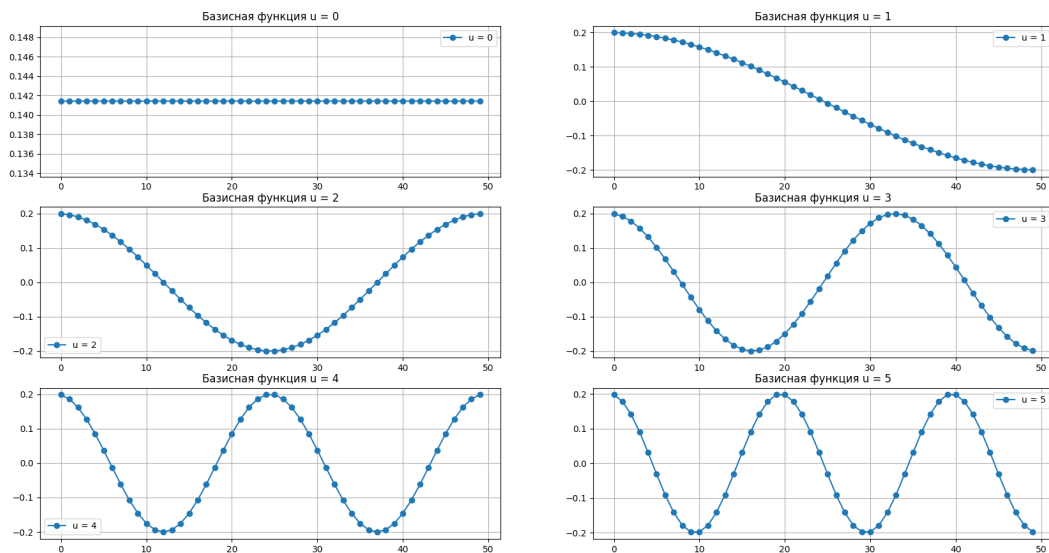


Рис. 1. Графическое представление функций ДКП (первые 6 шт.)

Каждая четная базисная функция (если начинать с нуля) является симметричной относительно середины интервала, а каждая нечетная является антисимметричной.

Смена направления обработки одномерного сигнала из выражения (4) приводит к изменению знака каждой нечетной составляющей на противоположное значение. ДКП примет следующий вид:

$$X(m) = \sqrt{\frac{2}{N}} C(m) \sum_{n=0}^{N-1} x(N-(n+1)) \cos\left(\frac{\pi(2n+1)m}{2N}\right). \quad (7)$$

Эффект изменения направления обработки может быть достигнут изменением выбора направления базисных функций:

$$X(m) = \sqrt{\frac{2}{N}} C(m) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{\pi(2N-(2n+1))m}{2N}\right). \quad (8)$$

При реализации (7) или (8) интересуют только антисимметричные составляющие базиса, из-за которых изменяется знак, получаемых составляющих ДКП, остальные (симметричные) составляющие не вносят изменений в результат.

Выражения для вычисления прямого блочного ДКП в традиционном виде для L блоков может быть записано:

$$X_T(m + kN) = \sqrt{\frac{2}{N}} C(m) \sum_{n=0}^{N-1} x(n + kN) \cos\left(\frac{\pi(2n+1)m}{2N}\right), \quad (9)$$

а обратного

$$x(n + kN) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{m=0}^{N-1} C(m) X_T(m + kN) \cos\left(\frac{\pi(2n+1)m}{2N}\right), \quad (10)$$

где $n = 0, \dots, N-1$, $m = 0, \dots, N-1$ – индексы во временной / пространственной областях и частотной области;

L – количество блоков;

$k = 0, \dots, L-1$ – номер блока.

При наличии одного блока (все обрабатываемые данные, $L = 0$) – выполняется преобразование в традиционной форме (4) или (9). При размере блока равного 1 и количестве блоков равном N , данные не изменяются (без

учета нормировки). Это позволяет рассматривать пространственную / временную области совместно с частотной на основе размера блоков.

Варианты блочного дискретного косинусного преобразования

Используя подход в формировании матриц преобразования (2) и (3), для двух блоков обрабатываемого сигнала рассмотрим две последовательных группы базисных функций. Матрицу $\mathbf{W}$ в традиционном виде (2) запишем $\mathbf{W}'$. Матрицу преобразования, получаемую на основе выборки из матрицы $\mathbf{W}$ от конца индексов к началу по строкам и столбцам ($\mathbf{W}_{N-1:0, N-1:0}$) запишем как $\mathbf{W}'$. Здесь возможны 4 варианта:

$$\mathbf{X}_{0:1} = (\mathbf{W}' \oplus \mathbf{W}') \times \mathbf{x}_{0:1} \quad (11)$$

$$\mathbf{X}_{0:1} = (\mathbf{W}' \oplus \mathbf{W}) \times \mathbf{x}_{0:1} \quad (12)$$

$$\mathbf{X}_{0:1} = (\mathbf{W} \oplus \mathbf{W}') \times \mathbf{x}_{0:1} \quad (13)$$

$$\mathbf{X}_{0:1} = (\mathbf{W} \oplus \mathbf{W}) \times \mathbf{x}_{0:1} \quad (14)$$

На Рис. 2 представлены варианты последовательностей из двух блоков базисных функций. Здесь присутствуют варианты с обращением относительно независимой переменное или без такого обращения. В случае если для блока отсутствует обращение, то остается прямой график. Если обращение присутствует представлен отраженный график.

Для выражения (11) изменений нет (это традиционный вид). Результаты вычисления на основе выражения (14) равно результату (11) с обратным знаком в связи с антисимметричностью нечетных базисных функций.

Другая ситуация будет для выражений (12) и (13). Здесь изменяется направление только одной функции из пары. Так как направление функции меняется на противоположное можно рассматривать пары функций, как

«разнонаправленные» функции. Но в паре они составляют симметричный набор значений в диапазоне изменения независимой переменной в смежных блоках.

Здесь наглядно проявляется эффект, лежащий в основе предлагаемого метода модификации блочного преобразования. Выполнение преобразования осуществляется отдельно для каждого блока, при этом сохраняются все свойства преобразования для каждого отдельного блока. Смена направления для одного из блоков, позволяет рассматривать результат для пары блоков как работу с симметричными (четными) базисными функциями (рис. 2).

Вычисление X_{S1} на основе ДКП для пары блоков при общей длине $2N$ и m от 0 до $N-1$ и m от N до $2N-1$ рассчитывается по следующим выражениям. Первому варианту соответствует пара функций:

$$X_{S1}(N - (m + 1)) = \sqrt{\frac{2}{N}} C(m) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{\pi(2N - (2n + 1))m}{2N}\right), \quad (14)$$

$$X_{S1}(m + N) = \sqrt{\frac{2}{N}} C(m) \sum_{n=N}^{2N-1} x(n) \cos\left(\frac{\pi((2n + 1) - 2N)m}{2N}\right), \quad (15)$$

где $m = 0, \dots, N - 1$ – индексы в частотной области.

В выражении (14) присутствует разворот косинусной составляющей. Вместо этого выражения можно использовать следующее выражение:

$$X_{S1}(N - (m + 1)) = \sqrt{\frac{2}{N}} C(m) \sum_{n=0}^{N-1} x(N - (n + 1)) \cos\left(\frac{\pi(2n + 1)m}{2N}\right) \quad (16)$$

Пары функций (14), (15) и (16), (15) дают одинаковые результаты.

Второму варианту блочного преобразования X_{S2} можно сопоставить пару функций:

$$X_{S2}(m) = \sqrt{\frac{2}{N}} C(m) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{\pi(2n + 1)m}{2N}\right) \quad (17)$$

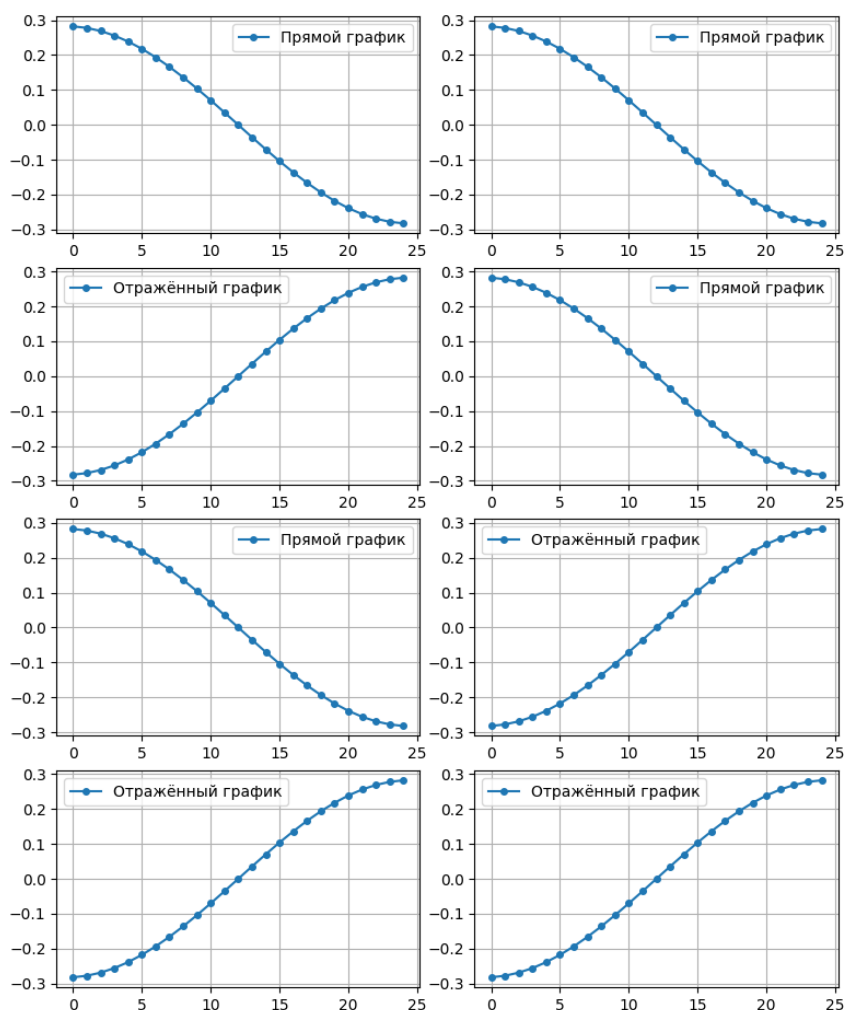


Рис. 2. Варианты отражения первой нечетной составляющей базисной функции ДКП

$$Xs2(2N - (m + 1)) = \sqrt{\frac{2}{N}} C(m) \sum_{n=N}^{2N-1} x(n) \cos\left(\frac{\pi(2N - (2n + 1))m}{2N}\right) \quad (18)$$

В выражении (18) можно заменить разворот функции косинуса обращение второй половины входных данных.

Результаты преобразований $Xs1$ и $Xs2$ представляет собой последовательное объединение двух векторов.

На рис. 3. Представлены исходная и обращенная тестовые последовательности.

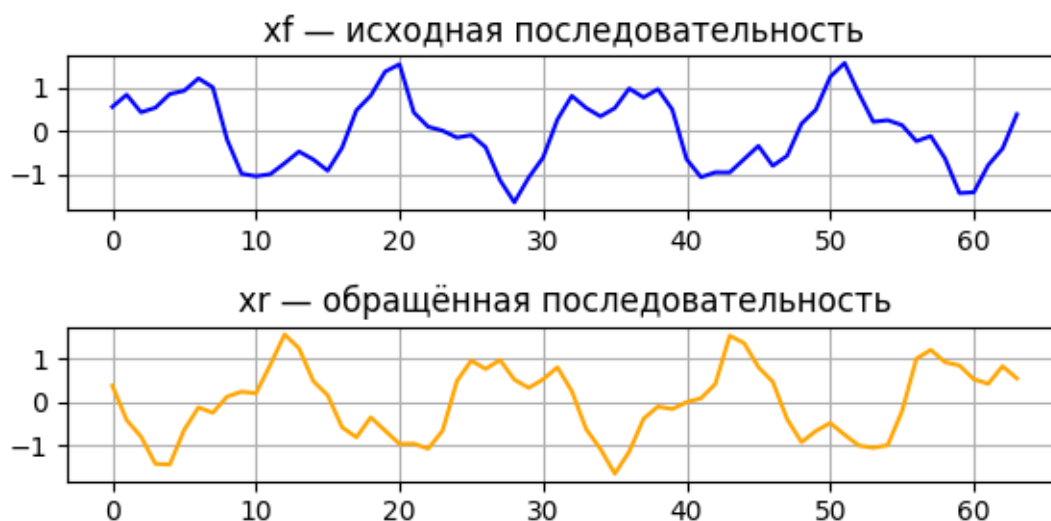


Рис. 3. Исходная и обращенная тестовые последовательности

В соответствии с выражениями (7) или (8) обрабатываемые данные могут быть произвольного типа, т.е. несимметричными относительно середины блока.

На рис. 4. представлены результаты ДКП исходной и обращенной тестовой последовательности. Расчеты приведены для двух блоков в соответствии с выражениями (14) и (16). При этом результаты ДКП обращенной последовательности размещены в обратном порядке.

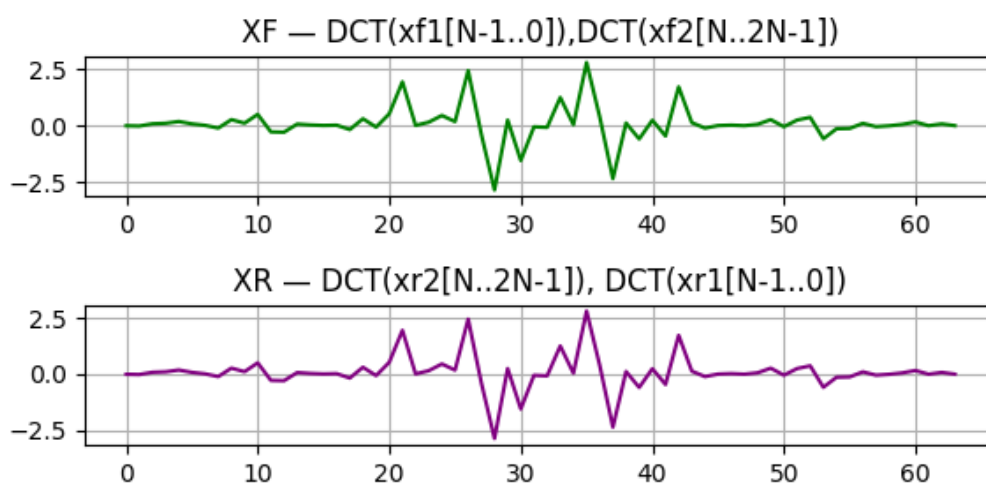


Рис. 4. Результаты ДКП исходной и обращенной тестовой последовательности

На рис. 5. представлены результаты сравнения ДКП исходной и обращенной тестовой последовательности.

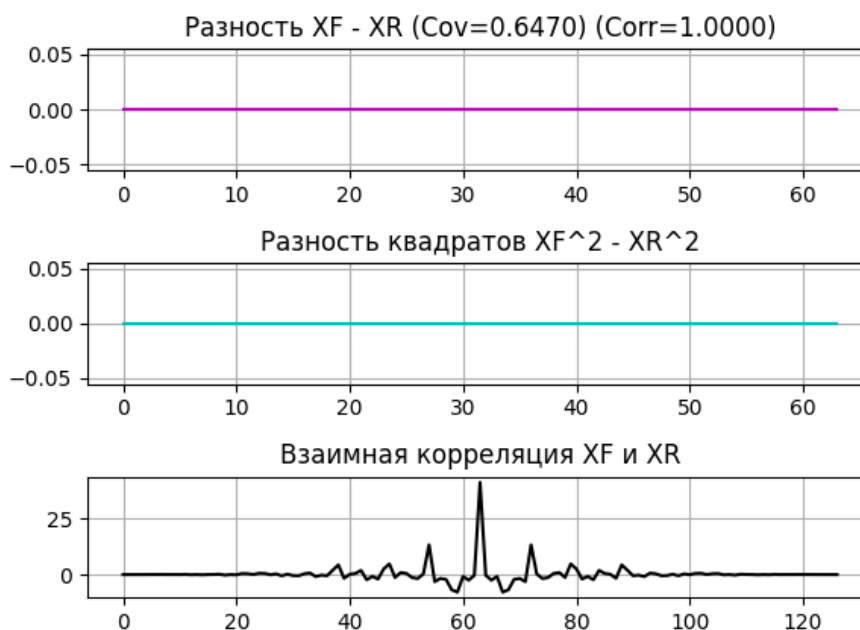


Рис. 5. Результаты сравнения ДКП исходной и обращенной тестовой последовательности.

Частотный состав, полученный на основе ДКП для прямого и обращенного порядка отсчетов сигнала полностью идентичен. Разность между результатами ДКП равна 0. Коэффициент корреляции равен 1. Взаимная корреляция симметрична относительно вертикальной оси, проходящей через середину.

Такой результат для произвольных входных данных не может быть реализован на основе традиционных выражений (4) – (10). Наличие инвариантности к направлению возможно на основе разработанных выражений (14) – (18).

Выводы

Симметрия базисных функций ДКП играет ключевую роль при изменении направления обработки сигнала. Четные функции остаются неизменными, а нечетные меняют знак, что приводит к эквивалентным преобразованиям при обратном порядке данных. Модифицированные выражения позволяют учитывать изменение направления обработки в

блочном ДКП, сохраняя свойства преобразования для каждого блока. Это открывает возможность гибкого управления спектральными характеристиками сигнала. Экспериментальные результаты подтверждают, что для разработанных выражений частотный состав ДКП инвариантен к направлению обработки данных. Разность между спектрами прямого и обращенного сигналов равна нулю, а коэффициент корреляции составляет 1. Предложенный подход может быть использован в задачах обработки сигналов, сжатия данных и анализа изображений, где важно учитывать симметрию и направление обработки. Дальнейшие исследования могут быть направлены на применение модифицированного ДКП в многомерных преобразованиях (например, для обработки видео) и оптимизацию вычислительных алгоритмов с учетом предложенных модификаций. Таким образом, работа расширяет теоретические основы ДКП и предлагает практические методы его адаптации для задач цифровой обработки сигналов.

Литература

1. Shao X., Johnson S.G. Type-II/III DCT/DST algorithms with reduced number of arithmetic operations // Signal Process. 2008. V. 88. №6. pp. 1553–1564.
2. Shen B., Sethi I.K., Bhaskaran V. DCT convolution and its application in compressed domain // IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology. 1998. V. 8. №8. pp. 947–952.
3. Obukhov A., Kharlamov A. Discrete cosine transform for 8×8 blocks with CUDA: Technical Report. nVIDIA, 2008. 15 p.
4. Raid A.M., Khedr W.M., El-dosuky M.A., Ahmed W. JPEG Image Compression Using Discrete Cosine Transform - A Survey URL: arxiv.org/abs/1405.6147v1.

5. Humbe R., Khond P., Ukirde R., Dere K.D. Discrete Cosine Transform Technique in Steganography // International Journal of Research Publication and Reviews. 2023. V. 4. №5. pp. 6028–6034.

6. Darbani A., AlyanNezhadi M.M., Forghani M. A new steganography method for embedding message in JPEG images // 2019 5th Conference on Knowledge-Based Engineering and Innovation (KBEI). 2019. pp. 617–621.

7. Bekerom D.V.D., Pannier E. A discrete integral transform for rapid spectral synthesis // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2021. V. 261, №15. URL: researchgate.net/publication/347516231_A_Discrete_Integral_Transform_for_Rapid_Spectral_Synthesis

8. Scribano C., Franchini G., Prato M., Bertogna M. DCT-Former: Efficient Self-Attention with Discrete Cosine Transform // Journal of Scientific Computing. 2023. V. 94. pp. 66–83.

9. Сингх П., Ганотра Д. Сверхвысокое разрешение изображения магнитно-резонансной томографии головного мозга с использованием дискретного косинусного преобразования и сверточной нейронной сети // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2023. т. 23. № 4. С. 734–742.

10. Алексеев В.В., Шоберг А.Г. Частотное разделение характеристик изображения в задачах суперразрешения // Инженерный вестник Дона. 2024, №8. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n8y2024/9375

11. Алексеев В.В., Шоберг А.Г. Шумоподавление изображений с использованием дискретно-косинусного преобразования // Инженерный вестник Дона. 2024. №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2024/8995

References

1. Shao X., Johnson S.G. Signal Process. 2008. vol. 88. №6. pp. 1553–1564.
2. Shen B., Sethi I.K., Bhaskaran V. IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology. 1998. vol. 8. №8. pp. 947–952.



3. Obukhov A., Kharlamov A. Technical Report. nVIDIA, 2008. 15 p.
4. Raid A.M., Khedr W.M., El-dosuky M.A., Ahmed W. URL: arxiv.org/abs/1405.6147v1.
5. Humbe R., Khond P., Ukirde R., Dere K.D. International Journal of Research Publication and Reviews. 2023. vol. 4. no. 5. pp. 6028–6034.
6. Darbani A., AlyanNezhadi M.M., Forghani M. 5th Conference on Knowledge-Based Engineering and Innovation (KBEI). 2019. pp. 617–621.
7. Bekerom D.V.D., Pannier E. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2021. Vol. 261, no. 15. URL: researchgate.net/publication/347516231_A_Discrete_Integral_Transform_for_Rapid_Spectral_Synthesis.
8. Scribano C., Franchini G., Prato M., Bertogna M. Journal of Scientific Computing. 2023. vol. 94. pp. 66–83.
9. Singh P., Ganotra D. Nauchno-texnicheskij vestnik informacionny`x texnologij, mexaniki i optiki. 2023. vol. 23. No. 4. pp. 734-742.
10. Alekseev V.V., Shoberg A.G. Inzhenernyj vestnik Dona. 2024, № 8. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n8y2024/9375
11. Alekseev V.V., Shoberg A.G. Inzhenernyj vestnik Dona, 2024, No. 2. ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2024/8995.

Дата поступления: 10.07.2025

Дата публикации: 25.08.2025