



Математическое моделирование распределения магнитного поля в окрестности эритроцита

А.В. Копыльцов

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» имени В.И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Аннотация: Эритроцит при перемещении по узкому капилляру вытягивается и перекачивается подобно гусенице трактора. Заряды, расположенные на поверхности эритроцита, перемещаются вместе с мембраной и порождают магнитное поле в окрестности мембраны эритроцита, которое может оказывать влияние как на элементы кровотока вне эритроцита, так и на его содержимое, в частности, на атомы железа входящие в состав гемоглобина. Построена трехмерная модель эритроцита. Проведенные расчеты напряженности магнитного поля H показали, что вращение мембраны эритроцита с расположенными на ней зарядами приводит к существенному перераспределению магнитного поля в окрестности эритроцита. Причем с увеличением частоты вращения мембраны эритроцита неоднородность H существенно возрастает и может привести к изменению гемодинамики в системе микроциркуляции.

Ключевые слова: математическая модель, эритроцит, узкий капилляр, магнитное поле, микроциркуляция

Введение

При перемещении по узкому капилляру эритроцит вытягивается и перекачивается подобно гусенице трактора с частотой вращения до 50 оборотов в секунду. Заряды расположены на поверхности эритроцита и составляют около 20 миллионов элементарных зарядов, каждый из которых равен $1,60 \times 10^{-19}$ Кл. Поэтому заряд эритроцита равен $0,32 \times 10^{-11}$ Кл [1-9]. Движущиеся вместе с мембраной эритроцита заряды порождают магнитное поле в окрестности эритроцита, которое может оказывать влияние как на элементы кровотока вне эритроцита, так и на его содержимое, в частности, на атомы железа входящие в состав гемоглобина. Поэтому важно оценить напряженность магнитного поля эритроцита и ее зависимость от гемодинамических параметров кровотока.

Математическая модель

Форма эритроцита аппроксимирована усеченным цилиндром радиуса r с образующими $L1$ и $L2$ ($L1 \leq L2$). Предполагается, что все заряды на поверхности эритроцита одинаковые и равномерно распределены по поверхности эритроцита и перемещаются вместе с мембраной по замкнутым кривым, т.е. заряды равномерно расположены на замкнутых кривых, представляющих собой трапеции, которые получаются в результате пересечения усеченного цилиндра плоскостями параллельными плоскости вращения мембраны эритроцита (рис. 1).

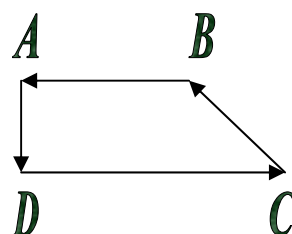


Рис. 1. - Стрелочками обозначены направления движения зарядов, перемещающихся вместе с мембраной эритроцита.

Согласно закону Био-Савара заряд q , движущийся со скоростью V , создает на расстоянии r магнитное поле, напряженность которого

$$H = \frac{qV \sin \alpha}{4\pi r^2},$$

где α – угол между направлением скорости V и радиус-вектором r (рис. 2) [10].

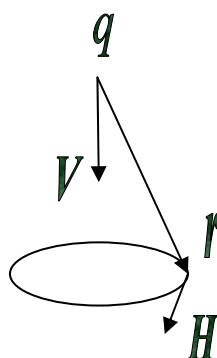


Рис. 2. - Заряд q движется со скоростью V и на расстоянии r создает магнитное поле напряженности H .

Поскольку на мембране эритроцита расположено несколько зарядов, и каждый из них в некоторой выбранной точке создает магнитное поле, то в этой точке осуществляется векторное суммирование напряженностей создаваемых каждым из зарядов.

Результаты и их обсуждение

Расчеты напряженности H магнитного поля были проведены в плоскостях перпендикулярных оси капилляра на расстояниях от передней части эритроцита от 1 до 4 мкм. При расчетах использовались следующие значения параметров: заряд эритроцита $Q_{RBC}=0,32 \times 10^{-11}$ Кл, количество замкнутых траекторий $N_f=101$ на мембране эритроцита, на которых расположены заряды в количестве $N_z=38594$, частота вращения мембраны эритроцита $w=20$ об/сек, радиус эритроцита $r=2$ мкм, объем эритроцита $V_{RBC}=94$ мкм³, площадь поверхности эритроцита $S_{RBC}=135$ мкм², образующие усеченного цилиндра $L1=3,4$ мкм и $L2=11,5$ мкм, скорость эритроцита $V=100$ мкм/сек, шаг по пространству $h=0,1$ мкм, число шагов по пространству $N_h=81 \times 81$ (от -4 мкм до 4 мкм по осям координат перпендикулярных оси капилляра). На рис. 3-5 приведены распределения напряженности магнитного поля H (А/м) в плоскостях перпендикулярных оси капилляра, расположенных на различных расстояниях d (мкм) от передней части эритроцита.

Из приведенных рисунков видно, что распределение H при малых расстояниях от эритроцита является неоднородным, что обусловлено разностью скоростей зарядов расположенных на вращающейся поверхности мембраны эритроцита. Если направление скорости движения эритроцита по капилляру и скорости зарядов направлены в одну сторону, то скорости складываются, а если в разные стороны, то вычитаются и, следовательно, итоговая напряженность H увеличивается или уменьшается соответственно. При удалении от эритроцита максимальное значение H становится меньше.

Так, при изменении расстояния d от 1 мкм до 4 мкм максимальное значение H уменьшается от $2,2 \times 10^{-6}$ до $3,9 \times 10^{-7}$ А/м.

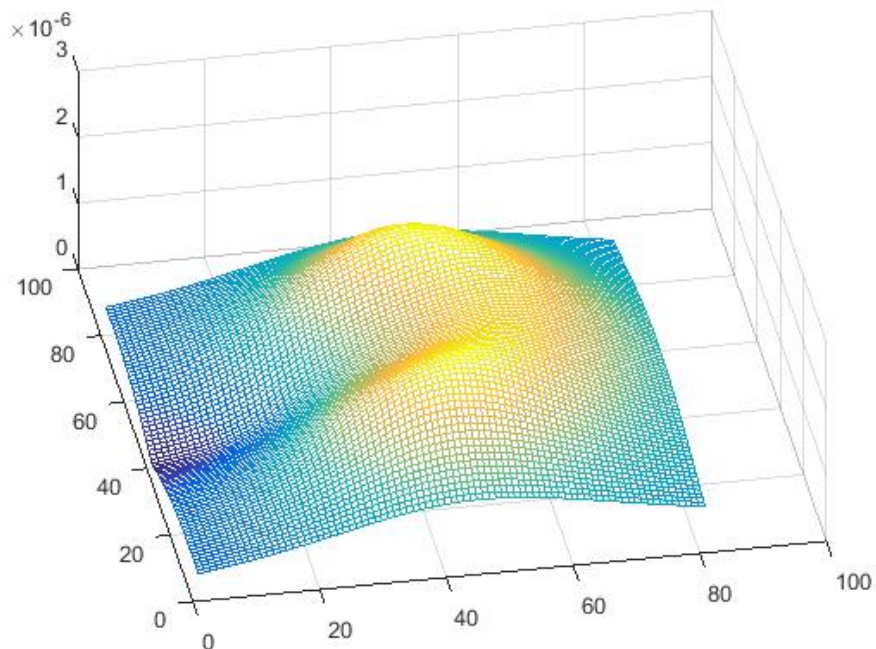


Рис. 3. - Распределение H на расстоянии $d=1$ мкм.

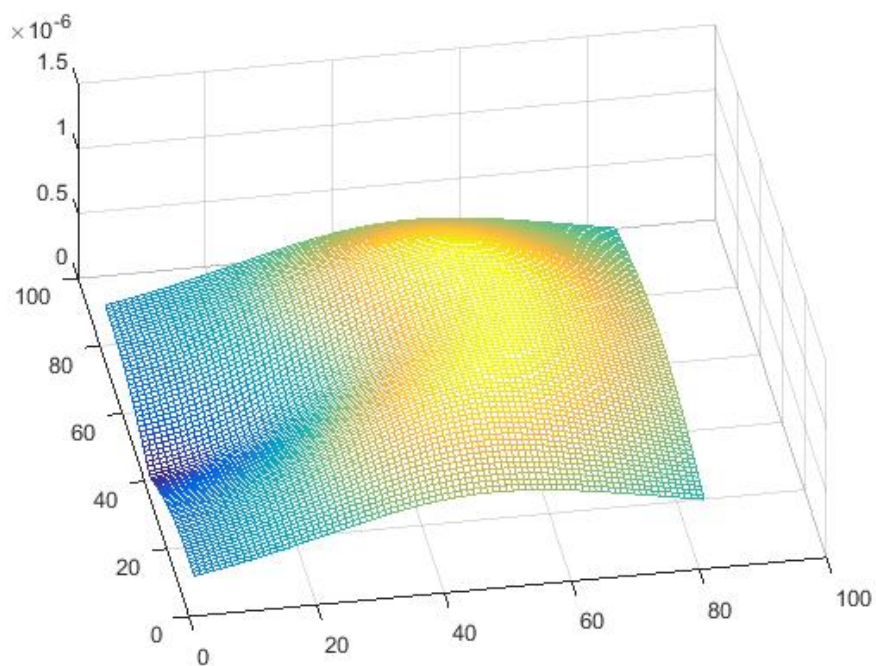


Рис. 4. - Распределение H на расстоянии $d=2$ мкм.

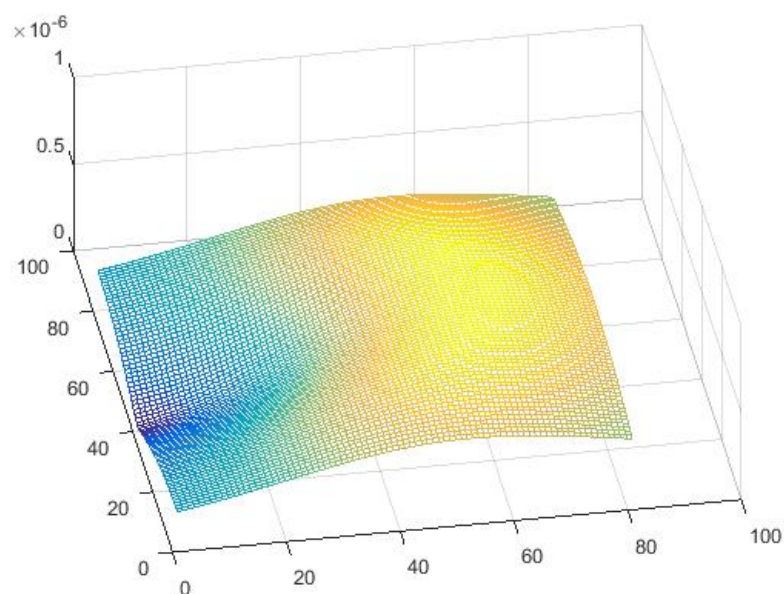


Рис. 5. - Распределение H на расстоянии $d=3$ мкм.

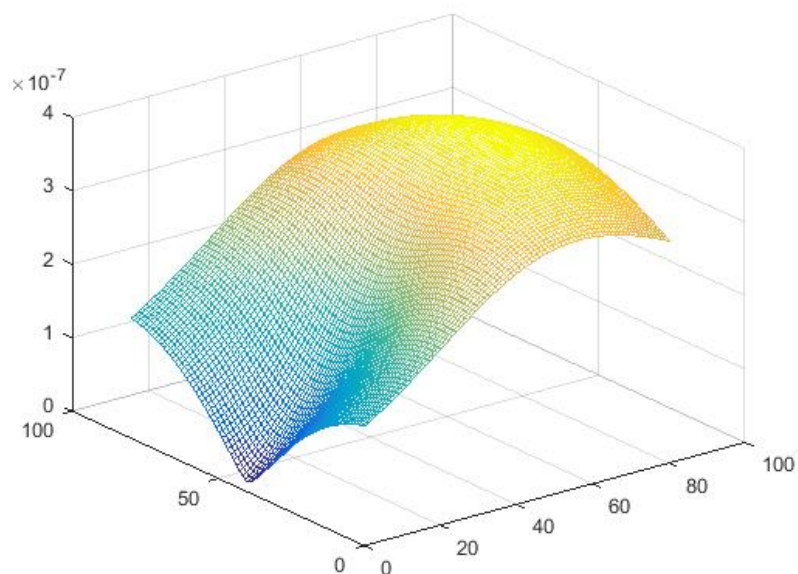


Рис. 6. - Распределение H на расстоянии $d=4$ мкм.

Так же были проведены расчеты при тех же значениях параметров, но для разных частот вращения мембраны эритроцита (от 10 до 50 об/сек) при скорости эритроцита 100 мкм/сек и в плоскости, которая расположена от эритроцита на расстоянии 1 мкм.

На рис. 7-9 приведены распределения напряженности магнитного поля H (А/м) при разных частотах ω (об/сек) вращения мембраны эритроцита.

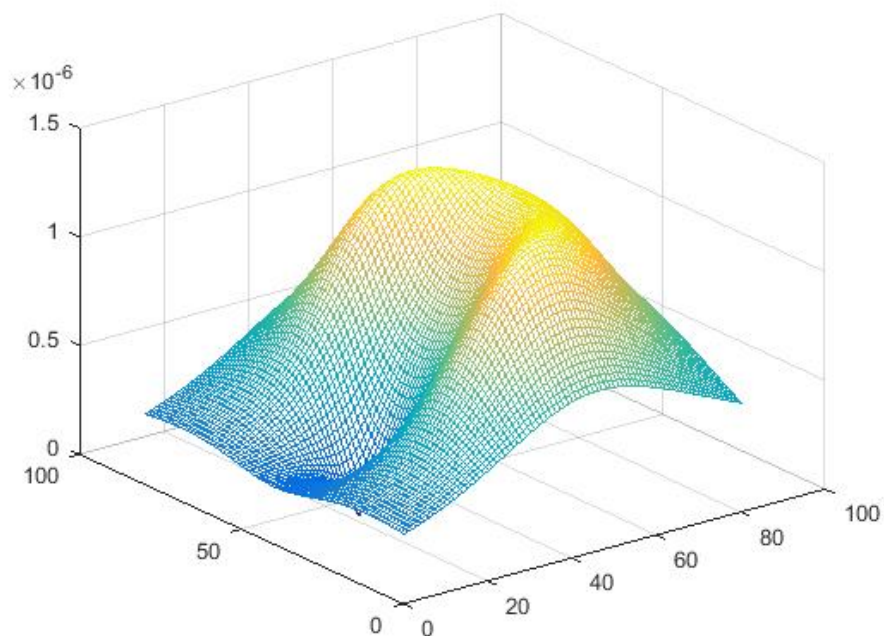


Рис. 7. - Распределение H при частоте $\omega=10$ об/сек.

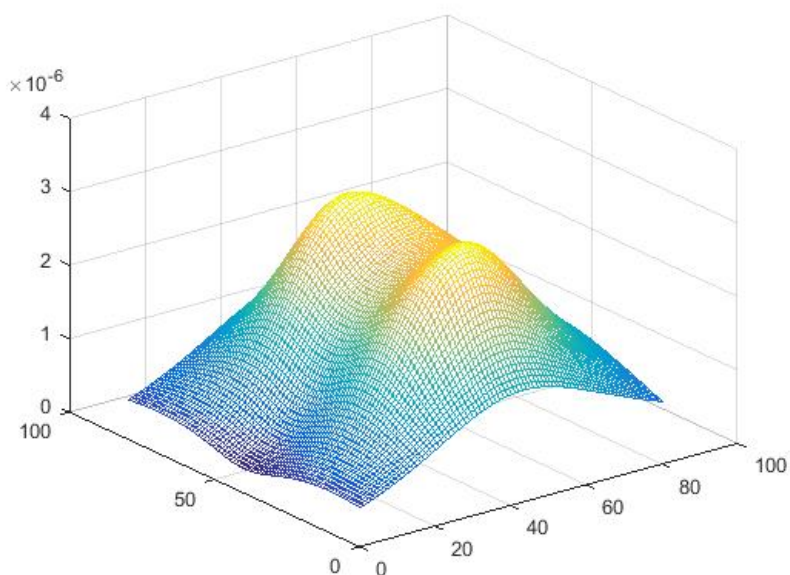


Рис. 8. - Распределение H при частоте $\omega=30$ об/сек.

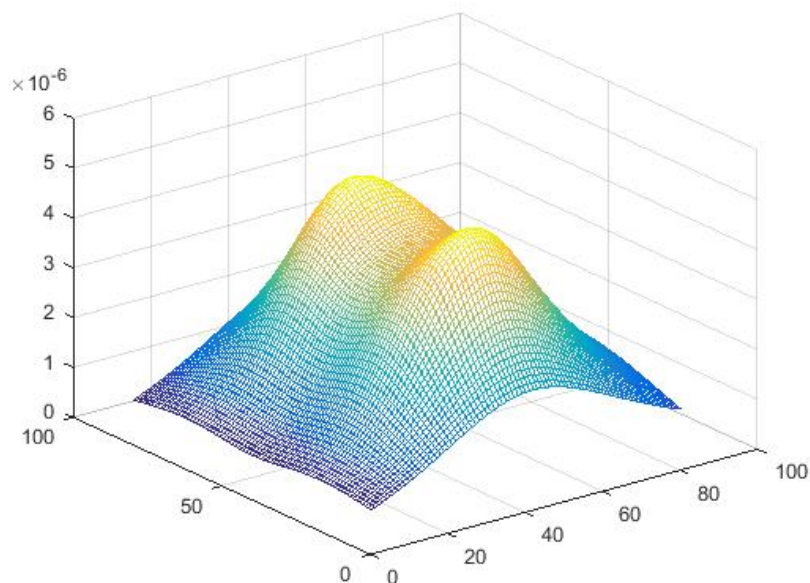


Рис. 9. - Распределение H при частоте $\omega=50$ об/сек.

Из приведенных рисунков видно, что при увеличении частоты вращения мембраны эритроцита разность между максимальным и минимальным значениями H увеличивается. Это объясняется тем, что разнонаправленные скорости зарядов на поверхности эритроцита увеличиваются, и при сложении со скоростью эритроцита получаем, что скорости части зарядов на мембране эритроцита существенно возрастают и, следовательно, максимальное значение H так же существенно увеличивается. Так, при увеличении ω от 10 об/сек до 50 об/сек максимальное значение H изменяется от $1,3 \times 10^{-6}$ до $5,0 \times 10^{-6}$ А/м.

Заключение

Проведенные расчеты показали, что трехмерная модель вращения мембраны эритроцита с расположенными на ней зарядами приводит к существенному перераспределению магнитного поля в окрестности эритроцита. Причем с увеличением частоты вращения мембраны эритроцита и уменьшением расстояния от эритроцита до точек, в которых вычисляется напряженность H , разность между максимальным и минимальным значением

H увеличивается. Неоднородность магнитного поля в окрестности эритроцита может привести к перераспределению сил приложенных к элементам кровотока, имеющим заряд, и, таким образом, привести к изменению гемодинамики в системе микроциркуляции. Неоднородное магнитное поле может оказывать влияние как на процессы, происходящие вне эритроцита, та и внутри него, в частности, на железосодержащий гемоглобин внутри эритроцита. В молекулах гемоглобина при некоторых заболеваниях происходит замещение Fe^{2+} на Fe^{3+} . К таким заболеваниям можно отнести, например, метгемоглобинемию, которая может быть как врожденной, так и приобретенной, например, при отравлении анилиновыми красителями, парацетамолом, перманганатом калия и другими ядами. При увеличении концентрации Fe^{3+} гемоглобин превращается в метгемоглобин (другое название - ферригемоглобин) и блокирует транспорт кислорода, что опасно для живого организма. Таким образом, содержимое эритроцита становится ферритом и так как феррит в постоянном магнитном поле при внешнем переменном СВЧ магнитном поле поглощает энергию [11, 12], то вращающийся эритроцит в узком капилляре тоже будет поглощать энергию СВЧ магнитного поля. Используя это явление можно строить различные математические модели и, по-видимому, можно подобрать характеристики (амплитуды, частоты, мощность и пр.) электромагнитного излучения, которое позволит найти способы лечения таких редких заболеваний как метгемоглобинемию.

Литература

1. Bessonov N., Sequeira A., Simakov S., Vassilevskii Yu., Volpert V. Methods of Blood Flow Modelling // Math. Model. Nat. Phenom. 2016. V. 11. № 1. pp. 1-25.
 2. Lighthill M. Pressure-forcing of tightly fitting pellets along fluid-filled elastic tubes // J. Fluid Mech. 1968. V. 34. pp. 113-143.
-

3. Kopyltsov A.V. Mathematical model of the motion of asymmetric erythrocytes along narrow capillaries // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2012. V. 26. № 6. pp. 535-553.

4. Копыльцов А.В. Двухмерная модель распределения магнитного поля между эритроцитами в узком капилляре // Инженерный вестник Дона. 2017, № 4. - URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4466

5. Копыльцов А.В. Математическое моделирование движения заряженного эритроцита по узкому капилляру. Моделирование и ситуационное управление качеством сложных систем: сб. докл. / СПб.: ГУАП, 2017. - С. 27-30

6. Fisher T.M., Strohr-Liesen M., Schmid-Schonbein H. The red cell as a fluid droplet: tank tread-like motion of the human erythrocyte membrane in shear flow // Science. 1978. V. 202. № 4369. pp. 894-896.

7. Schmid-Schonbein H., Gaetgens P., Fischer T., Stohr-Liesen M. Biology of red cells: non-nucleated erythrocytes as fluid drop-like cell fragments // Int. J. Microcirc.: Clin. Exp. 1984. V. 3. pp. 161-196.

8. Cherpakov A.V., Soloviev A.N., Gricenko V.V., Mohanty S.C., Parshin D.Y., Butenko U.I., Bocharova O.V. Comparison of finite element modeling and analytical approach results for oscillating rod structure with crack // Инженерный вестник Дона. 2014. № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2785

9. Копыльцов А.А. Модель классификации информации и алгоритм ее предварительной обработки для статических и динамических объектов // Известия СПбГЭТУ “ЛЭТИ” (известия государственного электротехнического университета), серия “Информатика, управление и компьютерные технологии”. 2013. № 6. С. 134-139.

10. Orear J. Physics. New York: Macmillan Publ. 1981. 624 p.

11. Гуревич А.Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. М.: Наука, 1973. 242 с.



12. Голубев А.А., Игнатьев В.К. Измерение тензорных величин магнитного поля в микроструктурном анализе ферромагнитных материалов // Инженерный вестник Дона, 2011. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2011/473

References

1. Bessonov N., Sequeira A., Simakov S., Vassilevskii Yu., Volpert V. Math. Model. Nat. Phenom. 2016. V. 11. № 1. pp. 1-25.
 2. Lighthill M. J. Fluid Mech. 1968. V.34. pp.113–143.
 3. Kopyltsov A.V. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2012. V. 26. № 6. pp. 535–553.
 4. Kopyltsov A.V. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus). 2017. № 4. URL: URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4466
 5. Kopyltsov A.V. Modelirovanie i situacionnoe upravlenie kachestvom slozhnyh system [Modeling and situational management of the quality of complex systems] (Rus)/ SPb.: GUAP. 2017. pp. 27-30.
 6. Fisher T.M., Strohr-Liesen M., Schmid-Schonbein H. Science. 1978. V. 202. № 4369. pp. 894–896.
 7. Schmid-Schonbein H., Gaehtgens P., Fischer T., Stohr-Liesen M. Int. J. Microcirc.: Clin. Exp. 1984. V. 3. pp. 161–196.
 8. Cherpakov A.V., Soloviev A.N., Gricenko V.V., Mohanty S.C., Parshin D.Y., Butenko U.I., Bocharova O.V. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus). 2014. № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2785
 9. Kopyltsov A.A. Journal of Saint-Petersburg State Electrotechnical University «LETI» (Rus). 2013. № 6. pp. 134-139.
 10. Orear J. Physics. New York: Macmillan Publ. 1981. 624 p.
 11. Gurevich A.G. Magnitnyj rezonans v ferritah i antiferromagnetikah [Magnetic resonance in ferrites and antiferromagnets] (Rus). M.: Nauka. 1973. 242 p.
-



12. Golubev A.A., Ignatiev V.K. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus). 2011. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2011/473