

Транспортная задача по критерию минимума суммарного времени и модификация метода Балинского для её решения

Н.М. Нечитайло¹, С.В. Мартемьянов², В.Л. Панасов¹

¹Ростовский государственный университет путей сообщения

²Институт водного транспорта им. Г.Я. Седова

Аннотация: сформулированная задача является частным случаем транспортной задачи с фиксированными доплатами, в которой на значение целевой функции влияют только временные затраты на доставку ресурсов по задействованным маршрутам и не влияют объёмы транспортируемых ресурсов. Решение на основе линеаризации целевой функции целесообразно в случаях ограниченности времени на поиск решения. Во-вторых, ввиду относительной простоты, такое решение может использоваться в качестве повторяющейся процедуры (для определения нижней границы) в более сложных, например, комбинаторных, алгоритмах при поиске точного решения задачи. Модификация метода Балинского заключается в последовательном сокращении размерности исходной задачи за счёт исключения строк либо столбцов матрицы перевозок, в которых истинные затраты совпадают с затратами приведённой задачи.

Ключевые слова: транспортная задача, минимум суммарного времени, линеаризация целевой функции, метод Балинского.

Имеется m исходных пунктов A_i ($i=1\dots m$), на которых сосредоточен однородный продукт в объёмах a_i . Имеется n пунктов назначения B_j ($j=1\dots n$), в которые должен быть доставлен продукт в объёмах b_j . Известно также время t_{ij} доставки груза по маршруту $A_i \rightarrow B_j$ (в объёме x_{ij}). Рассматривается задача с типовыми для транспортных задач ограничениями [1–7].

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq a_i, \quad i = 1 \dots m; \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &\leq b_j, \quad j = 1 \dots n; \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1 \dots m, \quad j = 1 \dots n. \end{aligned} \right\}$$

Минимизируется же в задаче суммарное время перевозок, то есть

функция
$$\Phi = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}), \quad (1)$$

где
$$f(x_{ij}) = \begin{cases} t_{ij}, & \text{если } x_{ij} > 0, \\ 0, & \text{если } x_{ij} = 0. \end{cases}$$

Таким образом, сформулированная задача является частным случаем транспортной задачи с фиксированными доплатами, в которой на значение целевой функции влияют только временные затраты на доставку ресурсов по задействованным маршрутам и не влияют объёмы транспортируемых ресурсов по любому из маршрутов. Несмотря на частный характер, сформулированная задача имеет существенное прикладное значение, например, при принятии решения на аренду однородных транспортных средств для перевозки относительно несрочных малогабаритных грузов из пунктов хранения или производства в пункты потребления. Предполагается, что в этом случае оплата за пользование каждым транспортным средством линейно зависит от времени его непосредственного участия в транспортировке груза и не зависит от объёма груза. Аналогичная задача может решаться транспортной организацией с целью минимизации расхода моторесурса транспортных средств или расхода горючего при выполнении заказа на транспортировку подобных грузов. Необходимость в решении рассматриваемой задачи может возникнуть и в случае организации перевозок спецтранспортом токсичных или радиоактивных отходов с группы предприятий или из мест техногенных катастроф до мест захоронения, когда ставится задача свести к минимуму вредное воздействие груза (суммарное время непосредственного контакта с грузом) на сопровождающий его персонал и используемые транспортные средства [8, 9]. Решение этой задачи тем более важно, поскольку многие токсичные вещества могут накапливаться в организме человека и поражение от их воздействия может наступать под воздействием суммарной дозы. Транспортные же средства в этих условиях (после получения заданной суммарной дозы вредного воздействия) должны либо подвергаться специальной обработке с целью продолжения эксплуатации, либо должны быть захоронены [9, 10].

Необходимо отметить, что отклонение плана перевозок задачи с фиксированными доплатами, полученного методом линеаризации целевой функции, от существующего оптимального решения тем меньше, чем меньше доля суммарных фиксированных доплат в общих затратах на выполнение операции. Считается [5], что в большинстве практических задач это отклонение не превышает 5–8 %. В случае же задачи по критерию суммарного времени перевозок (значение целевой функции определяется только фиксированными доплатами, то есть временами движения по используемым маршрутам) отклонение приближённого решения от существующего оптимального решения максимально и может превышать 25 % [4, 5, 9]. Тем не менее, приближённое решение на основе линеаризации целевой функции может оказаться весьма полезным, например, в случаях ограниченности времени на поиск решения. Во-вторых, ввиду относительной простоты его получения, приближённое решение может использоваться в качестве повторяющейся процедуры (для определения нижней границы) в более сложных, например, комбинаторных, алгоритмах при поиске точного решения задачи. Предлагаемая модификация метода Балинского [5] позволяет найти приближённое решение гарантированно не хуже существующего оптимального решения в интервале 10–15 % [10]. Для решения использовался метод последовательного улучшения плана, хотя, возможно, потоковые методы [11, 12] позволят получить результат за меньшее число итераций.

Линеаризация заключается в переходе от задачи минимизации исходной функции (1) к задаче минимизации функции

$$\Phi' = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{t_{ij}}{M_{ij}} x_{ij}, \quad (2)$$

где $M_{ij} = \min(a_i, b_j)$.

Модификация метода заключается в улучшении полученного приближенного плана и основывается на том, что в любом оптимальном плане $x^* = \left\| x_{ij}^* \right\|$ аппроксимирующей транспортной задачи всегда найдётся по

крайней мере два таких x_{ij}^* , что $x_{ij}^* = M_{ij}$. По таким маршрутам затраты в задачах (1) и (2) совпадают и равны t_{ij} . Для остальных же маршрутов

$$t_{ij} - \frac{x_{ij}^*}{M_{ij}} < t_{ij}.$$

Из-за несоответствия затрат на этих маршрутах общие значения целевых функций (1) и (2) при одних и тех же планах перевозок совпадать не будут (затраты аппроксимирующей задачи являются заниженными по отношению к реальным затратам). Поэтому можно предположить, что в ячейках матрицы перевозок аппроксимирующей задачи, для которых $x_{ij}^* = M_{ij}$, затраты исходной задачи отражены правильно, и улучшение этого

плана следует искать при помощи перераспределения перевозок только в тех ячейках, для которых $x_{ij}^* < M_{ij}$. Поэтому план перевозок, доставляющий минимум функции (2), рассматривается в качестве первого приближения к оптимальному плану исходной задачи. В этом плане отмечаются перевозки, для которых $x_{ij}^* = M_{ij}$, а затем производится вычёркивание строк исходной

матрицы, для которых $x_{ij}^* = M_{ij} = a_i$, и определяется $b'_j = b_j - M_{ij}$, и столбцов

этой матрицы, для которых $x_{ij}^* = M_{ij} = b_j$, и определяется $a'_i = a_i - M_{ij}$.

Для остальных строк и столбцов матрицы перевозок полагаем $a'_i = a_i$, $b'_j = b_j$. Затем определяются числа $M_{ij} = \min_{i,j} (a'_i, b'_j)$ и решается задача

(меньшей размерности) минимизации (2) с исходными данными a'_i, b'_j .

Для оптимального плана новой задачи снова повторяется процесс

вычёркивания строк и столбцов матрицы, пересчёт значений a'_i , b'_j и т.д. Этот процесс конечен, поскольку размерность задачи уменьшается.

В качестве иллюстрации задачу определения оптимального плана перевозок по критерию минимума суммарного времени рассмотрим на примере, представленном в виде матриц перевозок (табл. 1–3), где имеются 3 исходных пункта и 3 пункта назначения. Найдём для каждого маршрута коэффициенты t_{ij}/M_{ij} целевой функции (2) аппроксимирующей задачи и проставим их в правых верхних углах ячеек табл. 1. Прежде чем воспользоваться методом потенциалов для поиска оптимального плана, построим начальный план перевозок, например методом северо-западного угла. Количество перемещаемых ресурсов по каждому маршруту в соответствии с этим начальным планом представлено в центрах ячеек в табл. 1. При этом в соответствии с (2) $\Phi' = 19$.

Таблица № 1. Исходный план перевозок

	$b_1=17$	$b_2=12$	$b_3=28$	
$a_1=27$	$\frac{7}{17}$ 17	$-\frac{5}{12}$ 10	$+\frac{8}{27}$ 0,2	$U_1=0$
$a_2=20$	$\frac{4}{17}$ 0,21	$+\frac{2}{12}$ 2	$-\frac{5}{20}$ 18	$U_2=-0,25$
$a_3=10$	$\frac{5}{10}$ 0,29	$\frac{4}{10}$ 0,18	$\frac{3}{10}$ 10	$U_3=-0,2$
	$V_1=0,41$	$V_2=0,42$	$V_3=0,5$	

Затем определим значения симплекс-множителей (потенциалов) строк (U_i) и столбцов (V_j) матрицы перевозок и коэффициенты при свободных переменных в соответствии с [2]. Полученные потенциалы строк и столбцов представлены в правом столбце и нижней строке табл. 1, а коэффициенты

при свободных переменных – в левых нижних углах ячеек этой же таблицы. Поскольку $c'_{13} < 0$, план перевозок может быть улучшен. Построенный цикл перераспределения перевозок представлен в табл. 1 знаками «+» и «-», расположенными в левых верхних углах ячеек. Результат перераспределения ($\Delta x = 10$) представлен в табл. 2 ($\Phi' = 16,93$). В этой же таблице представлены рассчитанные для нового плана потенциалы строк, столбцов и коэффициенты при свободных переменных. Поскольку $c'_{21} < 0$ строим цикл перераспределения перевозок для улучшения плана (представлен в табл. 2 знаками «+» и «-», расположенными в левых верхних углах ячеек) при $\Delta x = 8$.

Таблица № 2. Цикл перераспределения перевозок при $\Delta x = 8$

	$b_1=17$	$b_2=12$	$b_3=28$	
$a_1=27$	- $\frac{7}{17}$ 17	$\frac{5}{12}$ 0,2	+ $\frac{8}{27}$ 10	$U_1=0$
$a_2=20$	+ $\frac{4}{17}$ -0,139	$\frac{2}{12}$ 12	- $\frac{5}{20}$ 8	$U_2=-0,046$
$a_3=10$	$\frac{5}{10}$ 0,076	$\frac{4}{10}$ 0,183	$\frac{3}{10}$ 10	$U_3=0,004$
	$V_1=0,42$	$V_2=0,213$	$V_3=0,296$	

Результат перераспределения представлен в табл. 3 ($\Phi' = 15,9$). В этой же таблице представлены рассчитанные для нового плана потенциалы строк, столбцов и коэффициенты при свободных переменных. Так как среди коэффициентов при свободных переменных нет отрицательных, следует вывод о получении оптимального плана. Однако, поскольку значение целевой функции (2) аппроксимирующей задачи является заниженным по

отношению к реальным затратам в исходной задаче (для маршрутов, где $x_{ij} < M_{ij}$), необходимо произвести перерасчёт функции в соответствии с (1). В результате получим, что суммарное время оптимального плана аппроксимирующей задачи составляет $\Phi=24$ ед.

Таблица № 3. Оптимальный план

	$b_1=17$	$b_2=12$	$b_3=28$	
$a_1=27$	$\frac{7}{17}$ 9 <i>0,074</i>	$\frac{5}{12}$ 12 <i>0,13</i>	$\frac{8}{27}$ 18 <i>0,076</i>	$U_1=0$
$a_2=20$	$\frac{4}{17}$ 8 <i>0,076</i>	$\frac{2}{12}$ 12 <i>0,053</i>	$\frac{5}{20}$ 10 <i>0,076</i>	$U_2=-0,176$
$a_3=10$	$\frac{5}{10}$ 10 <i>0,076</i>	$\frac{4}{10}$ 10 <i>0,053</i>	$\frac{3}{10}$ 10 <i>0,076</i>	$U_3=0,004$
	$V_1=0,42$	$V_2=0,343$	$V_3=0,296$	

Литература

1. Васильев, Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука. ГРФМЛ, 1988. – 552 с.
2. Гольштейн, Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. – М.: «Наука», ГРФМЛ, 1969. – 384 с.
3. Dantzig G.B. Application of the simplex method to a transportation problem. Activity analysis of production and allocation. ed T.C. Koopmans, Cowles Commission Monograph, 13, Wiley, New York 1951. pp. 359–373.
4. Зуховицкий, С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1969. – 382 с.
5. Корбут, А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1969. – 368 с.
6. Триус, Е.Б. Задачи математического программирования транспортного типа. – М., 1967. – 208 с.
7. Hitchcock F.L. Distribution of a product from several sources to numerous localities. J. Math. Phys., 1941, 20. pp. 224–230.
8. Вентцель, Е.С. Основы теории боевой эффективности и исследования операций. – М.: Военная академия им. Жуковского Н.Е., 1961. – 563 с.
9. Золотухин, В.Ф., Мартемьянов С.В., Нечитайло Н.М., Прокопец В.Н. Моделирование систем: учебное пособие. – М.: МО РФ, РВИРВ. 2000. – 164 с.
10. Нечитайло, Н.М. Математические модели транспортного типа по критерию времени: монография / Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов н/Д., 2007. – 146 с.: 23 ил.
11. Боженюк А.В., Герасименко Е.М. Разработка алгоритма нахождения максимального потока минимальной стоимости в нечеткой

динамической транспортной сети отходами // Инженерный вестник Дона, 2013, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1583.

12. Дроздов А.А., Миронюк В.П., Цыплаков В. Ю. Повышение эффективности системы двухэтапной транспортировки: на примере управления твердыми муниципальными отходами // Инженерный вестник Дона, 2012, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p1y2012/1078.

References

1. Vasil'ev, F.P. Chislennye metody reshenija jekstremal'nyh zadach [Numerical methods for solving extremal problems]. M.: Nauka. GRFML, 1988. 552 p.
2. Gol'shtejn, E.G., Judin D.B. Zadachi linejnogo programmirovaniya transportnogo tipa [Linear programming problem of transport type]. M.: «Nauka», GRFML, 1969. 384 p.
3. Dantzig G.B. Application of the simplex method to a transportation problem. Activity analysis of production and allocation. ed T.C. Koopmans, Cowles Commission Monograph, 13, Wiley, New York 1951. pp. 359–373.
4. Zuhovickij, S.I. Linejnoe i vypukloe programmirovanie [Linear and convex programming]. M.: Nauka, GRFML, 1969. 382 p.
5. Korbut, A.A. Diskretnoe programmirovanie [Discrete programming]. M.: Nauka, GRFML, 1969. 368 p.
6. Trius, E.B. Zadachi matematicheskogo programmirovaniya transportnogo tipa [The task of mathematical programming of transport type]. M., 1967. 208 p.
7. Hitchcock F.L. Distribution of a product from several sources to numerous localities. J. Math. Phys., 1941, 20. pp. 224–230.
8. Ventcel', E.S. Osnovy teorii boevoj jeffektivnosti i issledovanija operacij [Fundamentals of the theory of combat effectiveness and operations research]. M.: Voennaja akademija im. Zhukovskogo N.E., 1961. 563 p.



9. Zolotuhin, V.F. Modelirovanie sistem: Uchebnoe posobie [Modeling systems: a tutorial]. M.: MO RF, RVIRV. 2000. 164 p.
10. Nechitaylo, N.M. Matematicheskie modeli transportnogo tipa po kriteriju vremeni: monografiya [Mathematical models of transport type according to the criterion of time: the monograph]. Rost. gos. un-t putej soobshhenija. Rostov n/D, 2007. 146 p.: 23 il.
11. Bozhenjuk A.V., Gerasimenko E.M. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2013, №1 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1583.
12. Drozdov A.A., Mironjuk V.P., Cyplakov V. Ju. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p1y2012/1078.