Задачи об изгибных колебаниях стержней при гармонических и случайных воздействиях

А.М. Казиев, И.А. Казиев, К.Х. Хамизов, А.В. Шуганов, А.А. Ахохов, А.Б. Каскулов, Рамадан Анас, Р.А. Эдоков

Кабардино-Балкарский государственный университет им Х.М. Бербекова.

Аннотация: Решена задача расчёта стержней на векторные возмущения состоящей из пяти компонент: 1.кинематические поперечные колебания левого конца; 2.кинематические поперечные колебания правого конца; 3.динамический изгибающий момент на левом конце; 4.динамический изгибающий момент на правом конце; 5 динамическая равномерно распределённая поперечная нагрузка по длине стержня. Получены передаточные функции от каждого возмущения отдельно. Используя эти функции, получены элементы спектральной матрицы для стационарных случайных процессов, с учётом их коррелированности. Рассмотрены наиболее распространённые виды процессов: экспоненциально-коррелированный случайный процесс; процесс со скрытой периодичностью (с характерной частотой); усечённый белый шум. Показана формула для получения дисперсии перемещения сечений.

Ключевые слова: стержень, гармонические колебания, собственная частота, кинематические возмущения, динамические возмущения, передаточная функция, корреляционная матрица, случайный процесс, дельта-коррелированный случайный процесс, скрытая периодичность, усечённый белый шум.

Введение

Изгибные поперечные колебания стержней (балок) постоянного сечения при наличии вязкого трения [1-5] описываются неоднородным дифференциальным уравнением в частных производных

$$\rho\ddot{w} + 2\gamma\dot{w} + EJw^{IV} = q(z,\tau), \qquad z \in (0; l), \qquad \tau > -\infty, \qquad (B.1)$$

где $w(z, \tau)$ - функция прогибов; z, τ **-** пространственная и временная координаты; ρ - линейная плотность масс; γ - коэффициент демпфирования; EJ -жесткость стержня на изгиб, $q(z, \tau)$ – внешняя линейная нагрузка, распределённая по длине. Наличие точки над переменными означает дифференцирование по времени, штрихи соответствуют дифференцированию по x. Введём безразмерные величины

$$u = cw, \quad x = z/l, \quad t = \tau\sqrt{EJ/\rho}/l^2, \quad \varepsilon = \gamma l^2/\sqrt{EJ\rho}, \quad f(x,t) = q(z,\tau)cl^4\rho/EJ,$$

c - произвольно выбираемая масштабирующая константа, и уравнение (B.1) примет вид

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + u^{IV} = f(x, t), \qquad x \in (0; 1), \qquad (B.2)$$

Уравнение (В.2) может иметь различные начально-краевые условия динамические и кинематические [6], [7].

I. Свободные колебания

Свободные колебания стержня описываются однородным дифференциальным уравнением в частных производных эллиптического типа

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + u^{IV} = 0, \qquad 0 < x < 1, \qquad t > -\infty, \qquad (1.1)$$

к которому присоединяются начальные и граничные условия. В задаче об определении спектров собственных частот и собственных форм начальные условия не требуются. В качестве примера возьмём однопролётный стержень, у которого граничные условия однородные и имеют вид

$$u(0, t) = 0, \quad u''(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad u''(1, t) = 0. \qquad (1.2)$$

Решение задачи (1.1), (1.2) отыскивается с помощью метода разделения переменных

$$u(x, t) = X(x)\, e^{\lambda t}, \qquad (1.3)$$

где

$$\lambda = -\mu + i\omega \qquad (1.4)$$

- характеристический показатель, μ и ω – подлежащие определению коэффициент затухания и частота свободных колебаний.

Подстановка (1.3) в (1.1), (1.2) даёт

$$(\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda)X + X^{IV} = 0, \qquad X(0) = 0, \quad X''(0) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X''(1) = 0. \qquad (1.5)$$

Введём обозначение

$$b^4 = -\lambda^2 - 2\varepsilon\lambda \qquad (1.6)$$

и перепишем задачу (1.5)

$$X_{xx} - b^4 X = 0, \qquad X(0) = 0, \quad X''(0) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X''(1) = 0. \qquad (1.7)$$

Тогда её общее решение имеет вид

$$X(x) = A\sin bx + B\cos bx + C\,\mathrm{sh}\,bx + D\,\mathrm{ch}\,bx. \tag{1.8}$$

Дифференцирование даёт

$$X'(x) = b(A\cos bx - B\sin bx + C\,\mathrm{ch}\,bx + D\,\mathrm{sh}\,bx), \tag{1.9}$$

$$X''(x) = b^2(-A \sin bx - B \cos bx + C\,\mathrm{sh}\,bx + D\,\mathrm{ch}\,bx), \tag{1.10}$$

$$X'''(x) = b^3(-A \cos bx + B \sin bx + C\,\mathrm{ch}\,bx + D\,\mathrm{sh}\,bx). \tag{1.11}$$

Из граничных условий (7) следует

$$B = D = C = 0, \quad \sin b = 0, \quad \Rightarrow b = k\pi. \tag{1.12}$$

Найденное значение b подставим в (1.6), учтём (1.4) и получим

$$\mu^2 - \omega^2 - 2\varepsilon\mu + k^4\pi^4 + i\,2\omega(-\mu + \varepsilon) = 0. \tag{1.13}$$

Поскольку левая часть уравнения (1.13) является комплекснозначной величиной, то оно эквивалентно системе из двух уравнений

$$\mu^2 - \omega^2 - 2\varepsilon\mu + k^4\pi^4 = 0, \qquad 2\omega(-\mu + \varepsilon) = 0.$$

Решая её, получим коэффициент затухания и спектр собственных частот

$$\mu = \varepsilon, \qquad \omega_{\varepsilon k} = \sqrt{\omega_{0k}^2 - \varepsilon^2}, \qquad k\in N. \tag{1.14}$$

Здесь $\omega_{0k} = k^2\ \pi^2$ – частоты свободных колебаний при отсутствии вязкого трения, $\omega_{\varepsilon k}$ – то же при наличии трения.

Из (1.8), (1.12) следует

$$X(x) = A\sin bx.$$

A – произвольное число, примем его равным единице, учтём значение b по (1.12) и получим спектр собственных форм в виде полуволн синусойды кратных k

$$X_k(x) = \varphi_k(x) = \sin k\pi x, \qquad k \in N. \tag{1.15}$$

II. Общая задача о вынужденных гармонических колебаниях стержня

1. Общая постановка задачи

Вынужденные детерминистические колебания стержня в установившемся режиме при гармонических (динамических и кинематических) возмущениях описываются задачей без начальных условий

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + u^{IV} = f_1(x, t)\,, \quad 0 < x < 1, \quad t > -\infty, \tag{1.1.1}$$

$$u(0, t) = f_2(t)\,, \quad u''(0, t) = f_3(t)\,, \quad u(1, t) = f_4(t)\,, \quad u''(1, t) = f_5(t)\,, \tag{1.1.2}$$

Положим, что поперечная нагрузка распределена равномерно по длине стержня и все возмущения являются гармоническими с частотами Ω_k и начальными фазами α_k. Тогда они могут быть представлены как комплекснозначные функции

$$f_k(t) = a_k e^{i(\Omega_k t + \alpha_k)}\,, \quad k = 1, 2, \ldots 5.$$

Если упростить, то

$$f_k(t) = A_k e^{i\Omega_k t}, \qquad A_k = a_k e^{i\alpha_k}.$$

Здесь a_k, A_k – действительная и комплексная амплитуды возмущений.

2. Автономные задачи

2.1. Вынужденные колебания от равномерной поперечной нагрузки

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + u^{IV} = e^{i\Omega t}\,, \quad 0 < x < 1, \quad t > -\infty. \tag{2.2.1}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u''(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad u''(1, t) = 0, \quad t > -\infty. \tag{2.2.2}$$

$$u(x, t) = H(x, i\Omega)\, e^{i\Omega t}, \tag{2.2.3}$$

$H(x, i\Omega)$ – передаточная функция. (2.2.3) подставляем в (2.2.1), (2.2.2) и получаем задачу

$$[(i\Omega)^2 + 2\varepsilon(i\Omega)]H + H^{IV} = 1, \tag{2.2.4}$$

$$H(0, i\Omega) = 0, \quad H''(0, i\Omega) = 0, \quad H(1, i\Omega) = 0, \quad H''(1, i\Omega) = 0. \tag{2.2.5}$$

Обозначим

$$b^4 = -(i\Omega)^2 - 2\varepsilon(i\Omega),$$

перепишем (2.2.4)

$$H^{IV} - b^4 H = 1. \tag{2.2.6}$$

Общее решение (2.2.5), (2.2.6) имеетвид

$$H(x, i\Omega) = H_1(x, i\Omega) = A \sin bx + B \cos bx + C\, \mathrm{sh}bx + D\, \mathrm{ch}bx - b^{-4}. \tag{2.2.7}$$

В силу (2.2.5)

$$B + D - b^{-4} = 0, \qquad -B + D = 0,$$

$$A \sin b + B \cos b + C\, \mathrm{sh}\, b + D\, \mathrm{ch}\, b - b^{-4} = 0, \quad -A \sin b - B \cos b + C\, \mathrm{sh}\, b + D\, \mathrm{ch}\, b = 0.$$

Отсюда

$$A = (1\text{- }\cos b)/2\,b^4 \sin b, \quad B = D = 1/2\,b^4, \quad C = (1\text{- ch } b)/2b^4 \text{ sh } b.$$

2.2. Кинематически возбуждаемые перемещениями правого конца

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + u^{IV} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > -\infty. \qquad (2.2.8)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u''(0, t) = 0, \quad u(1, t) = e^{i\Omega t}, \quad u''(1, t) = 0. \qquad (2.2.9)$$

Решение имеет вид (2.2.3). Вместо (2.2.5), (2.2.6) теперь имеем

$$H^{IV} - b^4 H = 0. \qquad (2.2.10)$$

$$H(0, i\Omega) = 0, \quad H''(0, i\Omega) = 0, \quad H(1, i\Omega) = 1, \quad H''(1, i\Omega) = 0. \qquad (2.2.11)$$

Отсюда

$$H_4(x, i\Omega) = (\sin bx/\sin b + \text{sh}bx/\text{sh } b)/2. \qquad (2.2.12)$$

2.3. Кинематически возбуждаемые перемещения левого конца

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + u^{IV} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > -\infty. \qquad (2.2.13)$$

$$u(0, t) = e^{i\Omega t}, \quad u''(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad u''(1, t) = 0, \quad t > -\infty. \qquad (2.2.14)$$

$$H^{IV} - b^4 H = 0. \qquad (2.2.15)$$

$$H(0, i\Omega) = 1, \quad H''(0, i\Omega) = 0, \quad H(1, i\Omega) = 0, \quad H''(1, i\Omega) = 0. \qquad (2.2.16)$$

Передаточная функция получается подстановкой в (2.2.12) (1-x) вместо x

$$H_2(x, i\Omega) = [\sin b(1\text{-}x)/\sin b + \text{sh } b(1\text{-}x)/\text{sh } b]/2. \qquad (2.2.17)$$

2.4. Колебания, возбуждаемые моментом на правой опоре

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + u^{IV} = 0, \qquad (2.2.19)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u''(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad u''(1, t) = e^{i\Omega t}. \qquad (2.2.20)$$

$$H^{IV} - b^4 H = 0, \qquad (2.2.21)$$

$$H(0, i\Omega) = 0, \quad H''(0, i\Omega) = 0, \quad H(1, i\Omega) = 0, \quad H''(1, i\Omega) = 1. \qquad (2.2.22)$$

Решение этой задачи дает

$$H_5(x, i\Omega) = [-\sin bx / \sin b + \text{sh}bx / \text{sh } b]/2b^2. \qquad (2.2.23)$$

2.5. Колебания, возбуждаемые моментом на левой опоре

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + u^{IV} = 0 \qquad (2.2.24)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u''(0, t) = e^{i\Omega t}, \quad u(1, t) = 0, \quad u''(1, t) = 0. \tag{2.2.25}$$

$$H^{IV} - b^4 H = 0. \tag{2.2.26}$$

$$H(0, i\Omega) = 0, \quad H''(0, i\Omega) = 1, \quad H(1, i\Omega) = 0, \quad H''(1, i\Omega) = 0. \tag{2.2.27}$$

Передаточная функция получается подстановкой в (2.2.23) $(1\text{-}x)$ вместо x

$$H_3(x, i\Omega) = H_5(1-x, i\Omega) = [-\sin b(1-x) / \sin b + \operatorname{sh} b(1-x) / \operatorname{sh} b]/2b^2. \tag{2.2.28}$$

3. Общая задача при равенстве частот возмущений

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + u^{IV} = A_1 e^{i\Omega t}, \; 0 < x < 1, \quad t > -\infty, \tag{2.3.1}$$

$$u(0, t) = A_2 e^{i\Omega t}, \; u''(0, t) = A_3 e^{i\Omega t}, \; u(1, t) = A_4 e^{i\Omega t}, \; u''(1, t) = A_5 e^{i\Omega t}. \tag{2.3.2}$$

Используя принцип суперпозиции, можем записать

$$u(x,t) = [A_1H_1(x,i\Omega) + A_2H_2(x,i\Omega) + A_3H_3(x,i\Omega) + A_4H_4(x,i\Omega) + A_5H_5(x,i\Omega)]e^{i\Omega t} = H_0(x, i\Omega)e^{i\Omega t}. \tag{2.3.3}$$

То же в векторной форме имеет вид

$$u(x, t) = \mathbf{A}^{т}\mathbf{H}(x, i\Omega)e^{i\Omega t} = [\mathbf{A}, \mathbf{H}(x, i\Omega)]e^{i\Omega t}. \tag{2.3.4}$$

Обозначено

$$H_0(x, i\Omega) = A_1H_1(x, i\Omega) + A_2H_2(x, i\Omega) + A_3H_3(x, i\Omega) + A_4H_4(x, i\Omega) + A_5H_5(x, i\Omega) = \mathbf{A}^{т}\mathbf{H}(x, i\Omega) = [\mathbf{A}, \mathbf{H}(x, i\Omega)].$$

Верхний индекс т означает операцию транспонирования, $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение. Амплитуда колебаний

$$a(x, \Omega) = |H_0(x, i\Omega)| = [H_0(x, i\Omega)\, H_0^*(x, i\Omega)]^{1/2}. \tag{2.3.5}$$

III. Общая задача о случайных колебаниях стержня

1.Некоторые модели случайных процессов

1.1.Скалярные процессы

Динамическая нагрузка в поперечном направлении балки и кинематические возмущения на левом и правом концах зачастую являются стационарными случайными процессами [8-10]. Стационарность далее будем понимать в так называемом «широком» смысле, когда математическое ожидание и корреляционная функция обладают свойствами

$$\langle f(t)\rangle = \mathrm{const}, \qquad K_f(t_1, t_2) = K_f(t_2 - t_1) = K_f(\tau).$$

В рамках наиболее употребительной в приложениях корреляционной теории случайных процессов информация о них задаётся с помощью корреляционной функции и/или спектральной плотности. Рассмотрим кратко некоторые модели.

1) Дельта-коррелированный случайный процесс («белый шум»). Широкополосный процесс, который в равной степени содержит гармоники любых частот, т.е. $\omega \in (-\infty, \infty)$.

Корреляционная функция, спектральная плотность и дисперсия

$$K_f(\tau) = s\delta(\tau), \qquad S_f(\omega) = s / 2\pi, \qquad K_f(0) = D_f = \infty. \qquad (3.1.1)$$

$\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака, s - интенсивность белого шума. Дисперсия бесконечна, поэтому физически реального белого шума не существует.

2) Усечённые белые шумы.

а) Случайный процесс содержит сплошной низкочастотный спектр гармоник сегмента $[-\omega_c, \omega_c]$, ω_c – частота среза.

Корреляционная функция, спектральная плотность и дисперсия

$$K_f(\tau) = 2s_0 \sin \omega_c\tau/\tau, \qquad S_f(\omega) = \begin{cases} s_0, & |\omega| \le \omega_c, \\ 0, & |\omega| > \omega_c, \end{cases} D_f = 2s_0\omega_c. \qquad (3.1.2)$$

б)Случайный процесс состоит из гармоник с частотами на сегменте $[\omega_1, \omega_2]$.

Корреляционная функция, спектральная плотность и дисперсия

$$K_f(\tau) = 2s_0 (\sin \omega_2\tau - \sin \omega_1\tau)/\tau, \qquad S_f(\omega) = \begin{cases} s_0, & |\omega| \in [\omega_1, \omega_2], \\ 0, & |\omega| \notin [\omega_1, \omega_2], \end{cases} D_f = 2s_0(\omega_2 - \omega_1).(3.1.3)$$

3) Экспоненциально-коррелированные случайные процессы. Содержат в основном низкочастотные гармоники.

Корреляционные функции, спектральные плотности и дисперсии

$$а)\ K_f(\tau) = \sigma_f^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad S_f(\omega) = \frac{\sigma_f^2\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}, D_f = \sigma_f^2, \tag{3.1.4}$$

σ_f – среднеквадратическое отклонение, α - параметр широкополосности.

$$б)\ K_f(\tau) = \sigma_f^2 e^{-\alpha^2\tau^2}, \quad S_f(\omega) = \frac{\sigma_f^2\, e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}}{2\alpha\sqrt{\pi}}, D_f = \sigma_f^2. \tag{3.1.5}$$

4) Процессы со скрытой периодичностью (с характерной частотой).

Узкополосные процессы, содержащие гармоники с частотами, близкими к некоторой характерной частоте; процессы, близкие к периодическим (гармоническим) процессам.

$$K_f(\tau) = \sigma_f^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau, \quad S_f(\omega) = \frac{\sigma_f^2\alpha(\omega^2+\theta^2)}{\pi[(\omega^2-\theta^2)^2+4\alpha^2\omega^2]}, \theta^2 = \alpha^2+\beta^2,\ D_f = \sigma_f^2, \tag{3.1.6}$$

α - параметр широкополосности, β - характерная частота.

$$б)\ K_f(\tau) = \sigma_f^2 e^{-\alpha|\tau|}(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|), \quad S_f(\omega) = \frac{2\sigma_f^2\alpha\theta^2}{\pi[(\omega^2-\theta^2)^2+4\alpha^2\omega^2]}, \tag{3.1.7}$$

$$\theta^2 = \alpha^2+\beta^2, \quad D_f = \sigma_f^2,$$

α - параметр широкополосности, β - характерная частота.

1.2.Векторные процессы

Источник случайных колебаний во многих случаях является многомерным векторным, т. е. представляться в виде

$$\mathbf{f(t)} = \{f_1(t),\ f_2(t),\ldots,f_5(t)\}.$$

Здесь $f_k(t)$ – стационарные и стационарно связанные компоненты векторного процесса.

В рамках корреляционной теории информацию о векторных процессах удобнее всего иметь в виде спектральной матрицы

$$S_f(\omega)=\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} \end{pmatrix}, \qquad s_{ij}(\omega)=s_{ji}(\omega). \quad (3.1.8)$$

Спектральные плотности и взаимные спектральные плотности могут быть записаны в общем виде

$$s_{kl}(\omega)=\frac{c_{kl}\,\rho_{kl}\,\sigma_k\,\sigma_l\,L_1(i\omega)L_1^*(i\omega)}{L_2(i\omega)L_2^*(i\omega)}, k,\ l=1,2,\ldots,5, \quad (3.1.9)$$

где c_{kl} – const, σ_k, σ_l – среднеквадратические отклонения соответствующих компонентов случайного процесса, $L_1(i\omega)$, $L_2(i\omega)$ – полиномы аргумента $(i\omega)$, ρ_{kl} – нормированные элементы корреляционной матрицы случайного векторного процесса, причём

$$-1\le\rho_{kl}\le 1, \qquad \rho_{kk}=1. \quad (3.1.10)$$

Корреляционная матрица должна быть симметричной и неотрицательно определённой.Выпишем значения c_{kl} и выражения для полиномов $L_k(i\omega)$.

1) Экспоненциально-коррелированные случайные процессы.

$$c_{kl}=\alpha_{kl}/\pi, \qquad L_1(i\omega)=1, \qquad L_2(i\omega)=(i\omega)+\alpha_{kl},$$

$$s_{kl}(\omega)=\frac{\alpha_{kl}\,\rho_{kl}\,\sigma_k\,\sigma_l}{\pi(\omega^2+\alpha_{kl}^2)}, k,\ l=1,2,\ldots,5, \quad (3.1.11)$$

2) Процессы со скрытой периодичностью (с характерной частотой).

а) $c_{kl}=\alpha_{kl}/\pi$, $\qquad L_1(i\omega)=(i\omega)+\theta_{kl}$, $\qquad L_2(i\omega)=(i\omega)^2+2\alpha_{kl}(i\omega)+\theta_{kl}^2$,

$$s_{kl}(\omega)=\frac{\alpha_{kl}\rho_{kl}\sigma_k\sigma_l(\omega^2+\theta_{kl}^2)}{\pi[(\omega^2-\theta_{kl}^2)^2+4\alpha_{kl}^2\omega^2]},\ \theta_{kl}^2=\alpha_{kl}^2+\beta_{kl}^2. \quad (3.1.12)$$

б) $c_{kl}=2\alpha_{kl}\theta_{kl}^2/\pi$, $\qquad L_1(i\omega)=1$, $\qquad L_2(i\omega)=(i\omega)^2+2\alpha_{kl}(i\omega)+\theta_{kl}^2$,

$$s_{kl}(\omega)=\frac{2\alpha_{kl}\,\theta_{kl}^2\,\rho_{kl}\,\sigma_k\,\sigma_l}{\pi[(\omega^2-\theta_{kl}^2)^2+4\alpha_{kl}^2\,\omega^2]},\ \theta_{kl}^2=\alpha_{kl}^2+\beta_{kl}^2. \quad (3.1.13)$$

2. Постановка и решение задачи

На стержень действуют равномерно распределённая динамическая нагрузка в поперечном направлении $f_1(t)$ и кинематические возмущения на левом и правом концах $f_2(t)$ –$f_5(t)$ в виде случайных процессов, и задача приобретает вид

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + u^{IV} = f_1(t)\,, \quad 0 < x < l, \quad t > -\infty, \tag{3.2.1}$$

$$u(0, t) = f_2(t), \quad u''(0, t) = f_3(t), \quad u(l, t) = f_4(t), \quad u''(l, t) = f_5(t). \tag{3.2.2}$$

Процесс возмущений является векторным состоящим из пяти компонентов

$$\mathbf{f(t)} = \{f_1(t),\ f_2(t),\ \dots,\ f_5(t)\}.$$

Пусть он будет стационарным, со стационарно связанными компонентами, с нулевым математическим ожиданием, с заданной спектральной матрицей.

Тогда в установившемся режиме $u(x, t)$ будет центрированным пространственно-временным случайным полем, стационарным во времени и неоднородным по пространственной координате. Будем искать спектральную плотность и дисперсию поперечных отклонений стержня.

Для определения спектральной плотности выходного процесса имеются два пути.

1)Используются ранее найденные для гармонических колебаний передаточные функции $H_j(x, i\Omega)$, $j = 1, 2, \dots, 5$. Тогда спектральная плотность случайного процесса колебаний выписывается как произведение матриц

$$S_u(x, \omega) = \sum_{k=1}^{5}\sum_{l=1}^{5} H_k(x,i\omega)\,H_l^*(x,i\omega)\,s_{kl}(\omega) = \mathbf{H}^T(x, i\omega)\mathbf{S}_f(\omega)\mathbf{H}^*(x, i\omega). \tag{3.2.3}$$

2)Второй путь состоит в применении метода спектральных представлений. Это интегралы Фурье

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x,\omega)e^{i\omega t}d\omega, \qquad \mathbf{f(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \tag{3.2.4}$$

Здесь $\mathbf{F(\omega)} = \{F_l(\omega), F_2(\omega),\dots, F_5(\omega)\}$ – вектор трансформант входного процесса, $U(x,\omega)$ – трансформанта выходного процесса. Они обладают свойствами стохастической ортогональности по частоте ω

$$\langle U(x, \omega)\, U^*(x', \omega')\rangle = K_u(x, x', \omega)\, \delta(\omega - \omega'),\ \ \langle F_k(\omega)F_l^*(\omega')\rangle = s_{kl}(\omega)\delta(\omega - \omega'),$$

$$\langle U(x, \omega)\, F_l^*(\omega')\rangle = S_{uf_1}(\omega)\, \delta(\omega - \omega'). \tag{3.2.5}$$

(4) подставляем в (1)

$$\int_{-\infty}^{\infty}(i\omega)^2 U(x,\,\omega)e^{i\omega t}d\omega + 2\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}(i\omega)U(x,\,\omega)e^{i\omega t}d\omega + \int_{-\infty}^{\infty}U^{IV}(x,\omega)e^{i\omega t}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}F_1(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

После очевидного упрощения имеем

$$b^2U - U^{IV}=F_1, \qquad b^4= - (i\omega)^2 - 2\varepsilon(i\omega). \tag{3.2.6}$$

Аналогично для граничных условий (3.2.2)

$$U(0,\,\omega)= F_2, \qquad U''(0,\,\omega)= F_3, \qquad U(1,\,\omega)= F_4, \qquad U''(1,\,\omega)= F_5. \tag{3.2.7}$$

Поочередно оставляя одну из трансформант, решаем задачу (3.2.6), (3.2.7) точно так, как аналогичные задачи при гармонических колебаниях и получаем решения для всех возмущений

$$U_k(x,\,\omega)= F_k(\omega)\, H_k(x,\,i\omega), \qquad k = 1,\ 2,\ \dots,\ 5,$$

где $H_k(x,\,i\omega)$ – ранее полученные передаточные функции.

С помощью принципа суперпозиции получим суммарное решение

$$U(x,\,\omega)= \sum_{k=1}^{5} F_k(\omega)\, H_k(x,i\omega)= F^T(\omega)\, H(x,\,i\omega) = [F(\omega),\, H(x,i\omega)]. \tag{3.2.8}$$

Переходим к комплексно-сопряженным величинам

$$U^*(x',\,\omega') = \sum_{l=1}^{5} F_l^*(\omega')\; H_l^*(x',\,i\omega') = \mathbf{F}^{*T}(\omega')\,\mathbf{H}^*(x',\,i\omega') =$$

$$=[\mathbf{F}^*(\omega'),\,\mathbf{H}^*(x',\,i\omega')]. \tag{3.2.9}$$

Левые и правые части (3.2.8), (3.2.9) перемножаем соответственно

$$K_u(x,\,x',\,\omega)=\sum_{k=1}^{5}\sum_{l=1}^{5}H_k(x,i\omega)\,H_l^*(x',i\omega)\,s_{kl}(\omega) = \mathbf{H}^T(x,\,i\omega)\mathbf{S}_f(\omega)\mathbf{H}^*(\,x',\,i\omega). \tag{3.2.10}$$

При $x = x'$ имеем спектральную плотность

$$S_u(x,\,\omega) = K_u(x,\,x,\,\omega) = \sum_{k=1}^{5}\sum_{l=1}^{5}H_k(x,i\omega)\,H_l^*(x,i\omega)\,s_{kl}(\omega) =$$

$$=\mathbf{H}^T(x,\,i\omega)\mathbf{S}_f(\omega)\mathbf{H}^*(x,\,i\omega). \tag{3.2.11}$$

Для определения дисперсии применяется известная формула

$$D_u(x) = \int_{-\infty}^{\infty}S_u(x,\omega)d\omega. \tag{3.2.12}$$

Вывод. В данной работе ставилась задача показать возможности расчёта стержня на векторные возмущения в виде гармонических и случайных воздействий. Показана возможность получения передаточных функций от кинематических перемещений опор, динамического действия момента и распределённой нагрузки. Используя эти функции можно получить амплитуды перемещений и среднеквадратические отклонения. В работе получена спектральная матрица для стационарных случайных процессов, с учётом их коррелированности. Это позволит рассчитывать элементы сооружений в виде стержней на случайные воздействия в виде сейсмики

Литература

1.Казиев А. М. Колебания однородных и континуально-дискретных балок при векторных гармонических и случайных возмущениях: Дис. канд. техн. наук: 05.23.17 Нальчик, 2005 130 с. РГБ ОД, 61:05-5/3003.

2.Болотин В.В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. – М.: Стройиздат, 1982. – 351 с.

3. Казиев А. М., Хуранов В.Х., Костенко О.В. Исследование воздействия векторных случайных нагрузок на балки. Инженерный вестник Дона, 2017, №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4277.

4. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука,1979. 335 с.

5. Вентцель Е.С. Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и её инженерные приложения. М.: Высш. шк., 2000. 383 с.

6. Культербаев Х.П. Кинематически возбуждаемые случайные колебания балок. Инженерно-технические науки. Материалы научно-практической конференции 1994.Нальчик: Каб.-Балк. гос. с/х акад. 1995.Ч. 3. С. 23-27.

7. Культербаев Х.П. О случайных колебаниях растянутых балок. Математическое моделирование и краевые задачи. Самара: Сам. гос. тех. ун-т. 2003. С. 100-103.

8. Казиев А.М. О влиянии характерной частоты и широкополосности случайной нагрузки на колебания балок. Вопросы повышения эффективности строительства. Межвузовский сборник. Нальчик: КБГСХА, 2004. Вып. 2. С. 79-83.

9. Gajewski Antoni. Vibrations and stability of a non-conservatively compressed prismatic column under nonlinear creep conditions. J. Theor. and Appl. Mech. (Poland)., 2000. 38. – № 2. – pp. 259-270.

10. Keltie R.F., Cheng C.C. Vibration reduction of a mass-loaded beam. J. Sound and Vibr, 1995. № 2, pp. 213-228.

References

1. Kaziev A. M. Kolebaniya odnorodnyh i kontinual'no-diskretnyh balok pri vektornyh garmonicheskih i sluchajnyh vozmushcheniyah [Oscillations of homogeneous and continuum-discrete beams under vector harmonic and random perturbations]: Dis.kand. tekhn. nauk: 05.23.17 Nal'chik, 2005 130 p. RGB OD, 61:05-5/3003.

2. Bolotin V.V. Metody teorii veroyatnostej i teorii nadezhnosti v raschetah sooruzhenij. [Methods of probability theory and reliability theory in calculations of structures]. M.: Strojizdat, 1982. 351 p.

3. Kaziev A. M., Huranov V.H., Kostenko O.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2017, №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4277.

4. Bolotin V.V. Sluchajnye kolebaniya uprugih sistem [Random oscillation sofelastic systems]. M.: Nauka, 1979. 335 p.

5. Ventcel' E.S. Ovcharov L.A. Teoriya sluchajnyh processov i eyo inzhenernye prilozheniya. [The theory of random processes and its engineering applications]. M.: Vyssh. shk., 2000. 383 p.

6. Kul'terbaev H.P. Kinematicheski vozbuzhdaemye sluchajnye kolebaniya balok. Inzhenerno-tekhncheskie nauki. Materialy nauchno-prakticheskoj konferencii 1994. Nal'chik: Kab.-Balk. gos. s/h akad. 1995. CH. 3. pp. 23-27.

7. Kul'terbaev H.P., Kaziev A.M., O sluchajnyh kolebaniyah rastyanutyh balok. Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi. [About random vibrations of a stretched beam. Mathematical modeling and boundary value problems]. Samara: Sam. gos. tekh. un-t. 2003. pp. 100-103.

8. Kaziev A.M., Voprosy povysheniya effektivnosti stroitel'stva. Mezhvuzovskij sbornik. Nal'chik: KBGSKHA, 2004. Vyp. 2. pp. 79-83.

9. Gajewski Antoni. J. Theor. and Appl. Mech. (Poland)., 2000. 38. № 2. pp. 259-270.

10. Keltie R.F., Cheng C.C. J. Sound and Vibr, 1995. № 2, pp. 213-228.