Моделирование натяжения нити, находящейся в равновесии на системе поверхностей

С.Ю. Богачева

Российский государственный университет им. А.Н. Косыгина, Москва

Аннотация: В статье рассматривался вопрос определения равновесия однородной нерастяжимой тяжелой нити при статическом взаимодействии с поверхностями различной формы. Приведены результаты аналитического моделирования натяжения нити с использованием численных методов. Получены зависимости натяжения в любой точке нити и нормальное давление нити, находящейся в равновесии на поверхностях, моделирующих рабочие органы текстильных машин.

Ключевые слова: идеальная нить, гибкая однородная нерастяжимая нить, натяжение, уравнение равновесия нити, равновесие на гладкой поверхности, равновесие на шероховатой поверхности, стрела провисания.

Задачи о равновесии широко распространены в инженерной практике. Во многих отраслях промышленности используются объекты, моделью которых служат гибкие и упругие стержни [1] и нить. Теория нити применяется в научных исследованиях при проектировании текстильных машин, устройств и технологических процессов, а также в других отраслях промышленности, при проектировании линий электропередач, подвесных мостов, канатных дорог и тросов, где нить, преимущественно, считают нерастяжимой [2]. В текстильной технике применяются механизмы, в которых нить контактирует с поверхностями различной формы. Натяжение при производстве пряжи и дальнейшей переработке имеет большое значение для технологического процесса прядения. Основные положения механики идеальной нити изложены в монографиях А.П. Минакова [3], В.С. Щедрова [4], Н.И. Алексеева [5], Ю.В. Якубовского с соавторами [6] и др.

Для изучения свойств конструкций обычно бывает достаточно рассмотреть упрощенную схему конструкции, которую часто называют системой [1]. В работе рассматривалось равновесие гибкой нерастяжимой нити, находящейся в равновесии на системе поверхностей. Расстояния между осями шкивов заданы l_1, l_2, d, радиусы шкивов – r_k. На горизонтальном и вертикальном пролетах нить имеет малую стрелу провисания.

Задача представляла собой совокупность отдельных участков: контактирование нити с гладкой поверхностью цилиндра, контактирование с шероховатой цилиндрической и конической поверхностями и участок нити с малой стрелой провисания. Расчеты равновесных конфигураций пространственной модели нити рассматривались в работах [7, 8]. В данном случае приняли, что нить имеет форму плоской кривой.

В начале рассматривалось равновесие тяжелой нити весом q на гладкой поверхности цилиндра [9]. Дифференциальные уравнения равновесия нити примут вид:

$$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{ds}} + \mathrm{q} \cdot \cos\varphi = 0 ; \qquad \frac{T}{r} - q\sin\varphi - N = 0 \tag{1}$$

где T – натяжение нити в точке, Н; φ, s – угловая и дуговая координаты точки нити, соответственно м; r – радиус, м; N – реакция поверхности, Н.

Из системы (1) получен закон натяжения нити в зависимости от угловой координаты на гладкой цилиндрической поверхности:

$$T = T_A - q \cdot r\sin\varphi$$

и нормальное давление в нижней точке нити:

$$N_L = \frac{T_A}{r} - 2q.$$

Чтобы натяжение в нижней точке цилиндра было неотрицательным, условие выбора начального натяжения выглядит так:

$$T_A \geq qr\ .$$

Дифференциальное уравнение равновесия следующей вертикальной части нити на ось x, направленную вертикально вверх:

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) - q = 0\ .$$

Закон распределения натяжения вдоль нити:

$$T = T_A + q \cdot x$$

Определена зависимость натяжения нити в точке схода нити от начального натяжения тяжелой нити, контактирующей с гладкой поверхностью цилиндра. Дифференциальные уравнения равновесия нити на цилиндре имеют вид:

$$\frac{dT}{ds} - q \cdot cos\varphi = 0; \qquad \frac{T}{r} + q\sin\varphi - N = 0$$

Закон изменения натяжения на участке нити:

$$T = \ T_B + qrsin\varphi.$$

На третьем участке нити с малой стрелой провисания натяжение определяется, как:

$$T = q(a + f - y)$$

Натяжение нити в точках опор определяется:

$$T_K = q(a + f); \ T_E = q(a + f),$$

следовательно, $T_E = T_K = T_B + qr.$

На заключительном этапе рассмотрено равновесие нити на шероховатой поверхности кругового конуса [9]. Длина нити, лежащей на конусе равна $L = R\varphi = \frac{\pi R}{2}$, радиус кривизны равен радиусу R окружности $\rho = R = const$ [10].

Дифференциальные уравнения равновесия нити на поверхности кругового конуса в проекциях на оси трехгранника $M\overline{\tau n g}$ (рис.1), связанного с поверхностью:

$$\frac{dT}{ds} + \mathrm{F} \cdot \cos\gamma = 0$$

$$\frac{T}{R} cos\theta - N = 0$$

$$\frac{T}{R} sin\theta - Fsin\gamma = 0 \quad , \quad F \le kN.$$

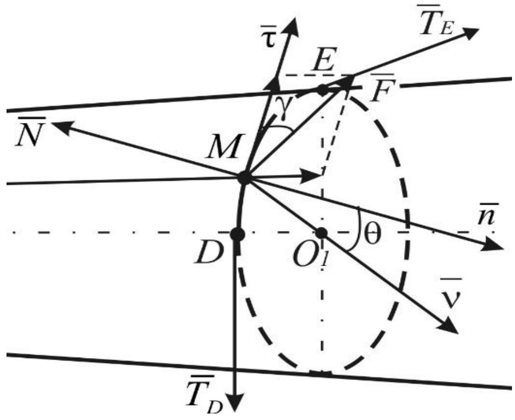

Рис.1. - Контактирование нити с конической поверхностью

$\bar{\tau},\bar{n}$ - *оси естественного трехгранника к поверхности;*

$\bar{\tau},\bar{\nu}$ - *оси естественного трехгранника к нити.*

Получено: $\frac{dT}{T} \geq -\chi d\varphi$, (2)

где $\chi = \sqrt{k^2 \cos^2\theta - \sin^2\theta}$.

Коэффициент χ должен быть вещественным, т.е. коэффициент трения должен быть больше тангенса угла геодезического отклонения $k \geq tg\theta$.

Второе необходимое условие равновесия выводим из неравенства (2):

$$T_D \rangle T_E \geq T_D \cdot e^{-\sqrt{k^2 cos^2 a - sin^2 a}\cdot(\varphi_E)}.$$

Окончательное натяжение в точке *B*, рассмотренной нити *AB* на всей системе поверхностей подчиняется условию при заданном начальном натяжении в точке *A*:

$$T_A + q(l_2 - r) > T_B \geq (T_A + ql_2)e^{-\sqrt{k^2 cos^2 a - sin^2 a}\cdot\varphi_E} - qr.$$

Получены аналитические зависимости натяжения нити по участкам в зависимости от погонного веса нити и свойств [9] контактирующей с нитью системы поверхностей, моделирующих некоторые рабочие органы текстильных машин.

Литература

1. Ахмедов А.Д. Достаточные условия устойчивости равновесия мгновенно-жестких шарнирно-стержневых систем // Инженерный вестник Дона, 2014, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2601.

2. Морозов Л.И. Объединенная методика расчета функциональных параметров работы аэростатно-канатных систем // Инженерный вестник Дона, 2015, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2015/3508.

3. Минаков А.П. Основы механики нити // Научно-исследовательские труды Московского текстильного института. – 1941. – Т. IX, Вып. 1. – С. 1-88.

4. Щедров В.С. Основы механики гибкой нити. М.: Машгиз, 1961. 215 с.

5. Алексеев Н.И. Статика и установившееся движение гибкой нити. М.: Легкая индустрия, 1970. 270 с.

6. Якубовский Ю.В., Коритысский Я.И., Мигушов И.И. Основы механики нити. М.: Легкая индустрия, 1973. 276 с.

7. Charrondière R., Florence Bertails-Descoubes, Neukirch S., Romero V. Numerical modeling of inextensible elastic ribbons with curvature-based elements // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1 June 2020, Volume 364, p.112922.

8. Sachin Goyal, Perkins N.C., Christopher L. Lee. Non-linear dynamic intertwining of rods with self-contact // International Journal of Non-Linear Mechanics. Issue 1, January 2008, Volume 43, p. 65-73.

9. Богачева С.Ю. Метод определения натяжения нити на поверхностях рабочих органов // Фундаментальные и прикладные научные исследования в области инклюзивного дизайна и технологий: опыт, практика и перспективы / Сборник научных трудов Международной научно-практической конференции. М.: РГУ им. А.Н. Косыгина, 2021. С. 29-33.

10. Меркин Д. Р. Введение в механику гибкой нити. М.: Наука, 1980. 240с.

References

1. Ahmedov A.D. Inzhenernyj vestnik Dona, 2014, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2601.

2. Morozov L.I. Inzhenernyj vestnik Dona, 2015, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2015/3508.

3. Minakov A.P. Nauchno-issledovatel'skie trudy Moskovskogo tekstil'nogo instituta. Moskva, 1941, T. IX, vol. 1. pp. 1-88.

4. Shchedrov V.S. Osnovy mekhaniki gibkoj niti. [Fundamentals of Flexible thread Mechanics]. Moskva: Mashgiz, 1961. 215p.

5. Alekseev N.I. Statika i ustanovivsheesya dvizhenie gibkoj niti. [Static and steady motion of the flexible thread]. Moskva: Legkaya industriya, 1970. 270p.

6. Yakubovskij YU.V., Koritysskij YA.I., Migushov I.I. Osnovy mekhaniki niti. [Fundamentals of Thread Mechanics]. Moskva: Legkaya industriya, 1973. 276p.

7. Charrondière R., Florence Bertails-Descoubes, Neukirch S., Romero V. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1 June 2020, Volume 364, p.112922.

8. Sachin Goyal, Perkins N.C., Christopher L. Lee. International Journal of Non-Linear Mechanics. Iss.1, January 2008, Volume 43, pp. 65-73.

9. Bogacheva S.Ju. Fundamental'nye i prikladnye nauchnye issledovanija v oblasti inkljuzivnogo dizajna i tehnologij: opyt, praktika i perspektivy. Sbornik nauchnyh trudov Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii. Moskva, Kosygin Russian State University, 2021. pp. 29-33.

10. Merkin D. R. Vvedenie v mekhaniku gibkoj niti. [Introduction to the mechanics of flexible thread]. Moskva: Nauka, 1980. 240p.