Инженерный вестник Дона, №10 (2024)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n10y2024/9584

Использование неравенств Чебышева в задачах проектирования сложных технических систем

Р.З. Хайруллин

Главный научный метрологический центр Минобороны России
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Бауманf
Московский государственный строительный университет

Аннотация: Представлен метод характеризации закона распределения свойством максимума энтропии, предназначенный для моделирования определяющего параметра (случайной величины) сложных технических систем с метрологическим обеспечением. В отличие от классического метода характеризации, предлагаемый метод основан на использовании неравенств Чебышева вместо ограничений на статистические моменты. Описан алгоритм построения функции распределения определяющего параметра. Дается сравнение результатов построения законов распределения с использованием разработанного метода и с использованием классического вариационного исчисления.
Ключевые слова: неравенства Чебышева, сложная техническая система, проектирование, определяющий параметр, характеризация закона распределения.

Введение

К настоящему времени накоплен большой опыт решения разнообразных задач построения статистических оценок на основе методов и приемов вероятностного анализа [1,2] и опыт применения указанных методов и приемов при проектировании сложных технических систем (СТС) [3,4]. При этом особого внимания заслуживают методологические разработки, используемые на ранних стадиях проектирования в станкостроении и машиностроении [5,6], ракетной и космической техники [7], приборостроении [8]. Вместе с тем, при проектировании сложных технических систем (СТС) с метрологическим обеспечением [9-11] выявились существенные трудности, препятствующие получению удовлетворительных результатов как теоретическим, так и экспериментальным путем.

Сложившаяся ситуация в практике проектирования СТС с метрологическим обеспечением характеризуется следующими важными особенностями:

-исходная информация, которую реально удается собрать и подготовить на ранних этапах проектирования для решения вероятностных задач, оказывается, как правило, неполной, неточной и, в высокой степени, неопределенной;

-форма задания исходной информации (в виде ограничений) в задачах может быть весьма разнообразной: средние и дисперсионные характеристики или функции от них, погрешности измерения или функции от них, характеристики, заданные вероятностной мерой и т.д.

Эти обстоятельства обусловливают необходимость постановки и исследования новых математических задач характеризации законов распределения и разработки методов и алгоритмов их решения с учетом ограничения на величину и характер изменения определяющего параметра (ОП) СТС.

В качестве обобщенной характеристики ОП выбирается закон ее распределения, который, как принято считать, в полной мере характеризует случайную величину.

Целью настоящей работы является разработка метода, позволяющего строить законы распределения ОП СТС с использованием минимального объема имеющейся информации на основе применения неравенств Чебышева.

Утверждение об экстремальном распределении ОП СТС при заданных ограничениях на статистические моменты

Пусть имеется некоторая совокупность ограничений, накладываемых на случайные величины, в виде заданных статистических моментов или в виде ограничения на область возможных значений этих величин. Ставится задача: не используя ничего, кроме этих ограничений, построить функцию распределения вероятностей, которая будет принята за модель изменения ОП СТС и использоваться на данном (текущем) этапе проектирования СТС.

Отметим, что по мере появления дополнительной информации о технических характеристиках СТС или о свойствах среды применения СТС функция распределения вероятностей ОП СТС будет поэтапно уточняться.

Пусть X — ОП (случайная величина) с плотностью распределения $f(x)$. Функции распределения $F(x)$ связана с функциями распределения ОП отдельных элементов СТС: $F_i(x)$, $i=1,2,...,n$ соотношением:

$$F(x)=\prod_{i=1}^{n}F_i(x). \tag{1}$$

Пусть далее известно конечное число k статистических моментов m_{ik} для ОП элементов СТС:

$$m_{ik}=\int_{x_{i1}}^{x_{i2}}x^k f_i(x)dx \ . \tag{2}$$

Тогда максимум энтропии:

$$H=-\int_{-\infty}^{\infty}f\ln f\,dx \tag{3}$$

достигается на распределении, составленном из кусочно-непрерывных функций, удовлетворяющих следующим дифференциальным уравнениям:

$$\ddot{F}^s(x)F^{s-1}-\dot{F}^s\prod_{i=1}^{i-s}\sum_k \nu_{ik}^s kx^{k-1}=0, \tag{4}$$

на участках (x_{s-1},x_s), $s=1,2,...,S$ если существуют такие ν_{ik}, что законы распределения: $F_i(x)=\sqrt[s]{F(x)}\left(\sqrt[s]{\prod_{i=1}^{S}\sum_k \nu_{ik}^s kx^{k-1}}\right)/\left(\sum_k \nu_{ik}^s kx^{k-1}\right)$ удовлетворяют условиям Эрдмана-Вейерштрасса (условиям сопряжения) [12,13]:

$$\left(f(x)\right)_-=\left(f(x)\right)_+, \qquad \left(\sum_k \nu_{ik}^s x_i^k\right)_-=\left(\sum_k \nu_{ik}^{s+1}x_i^k\right)_+ \tag{5}$$

в граничных точках участков (x_{s-1},x_s).

Знаки “-“ и “+” снизу означают, что соответствующие выражения вычисляются непосредственно перед и сразу после точки сопряжения,

$s=1,2,...,S$, где S - количество участков кусочной непрерывности функции распределения.

Пределы интегрирования x_{i1} и x_{i2} могут быть, в том числе, бесконечными. В случае $x_{i1}=-\infty$, $x_{i2}=\infty$ функция $f(x)$ будет непрерывна на всей числовой оси: $-\infty<x<\infty$.

Метод характеризации закона распределения ОП СТС на основе неравенств Чебышева

Если для функций $F_i(x)$ известны первые два статистических момента: m и σ^2, то неравенства Чебышева могут быть записаны в виде:

$$F_i(x)\le\begin{cases}\dfrac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2+(m_i-x)^2} & , \quad 0\le x\le m_i\\ 1 & , \quad x>m_i\end{cases} , \quad F_i(x)\ge\begin{cases}0 & , \quad x<m_i\\ \dfrac{(x-m_i)^2}{\sigma_i^2+(m_i-x)^2} & , \quad x\ge m_i\end{cases} . \qquad (6)$$

При построении оценки искомой функции $F(x)$ эти неравенства будем использовать вместо одного или нескольких ограничений (2) .

Замена ограничения (2) неравенствами Чебышева (6) позволяет свести вариационную задачу (1)-(5) к неклассической задаче оптимизации, содержащей в качестве ограничений неравенства. Размерность такой задачи будет меньше, чем размерность исходной задачи.

Рассмотрим случай $n=2$. Применение неравенств типа (6) к законам распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ позволяет выделить множество допустимых значений функции $F(x)=F_1(x)F_2(x)$ и определить границы возможного их изменения, которые изображены на рис. 1 штриховыми черными линиями.

Рассмотрим сначала случай, когда для первого элемента СТС используется ограничение (2), а для второго элемента - ограничения в виде неравенств Чебышева.

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что математическое ожидание $m_1=0$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma_1=1$.

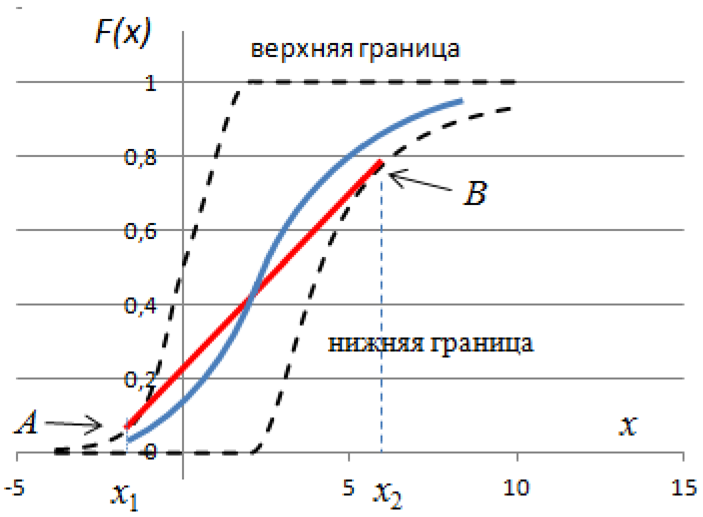

Рис. 1. – Функции распределения ОП СТС и границы области, определяемые неравенствами Чебышева

Тогда экстремум функционала (3) при условиях:

$$F(x) \le \begin{cases} F_2 \dfrac{1}{1+x^2} & , \quad x \le 0 \\ F_2 & , \quad x > 0 \end{cases} , \qquad F(x) \ge \begin{cases} 0 & , \quad x \le 0 \\ F_2 \dfrac{x^2}{1+x^2} & , \quad x > 0 \end{cases} , \tag{7}$$

ограничениях на статистические моменты:

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x f_2(x) dx \quad \text{и} \quad m_2^2 + \sigma_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_2(x) dx$$

и при следующих граничных условиях:

$$F(-\infty) = 0 , \quad F(\infty) = 1$$

достигается на экстремалях, состоящих из кусков экстремалей, лежащих, соответственно, внутри области (7), и кусков экстремалей, проходящих по границе. Поскольку $\partial^2 H / \partial f^2 \neq 0$, то в точках сопряжения указанных участков экстремаль $F(x)$ касается границы, определяемой соотношениями:

$$F \ = F_2 /(1+x^2) , \quad F \ = F_2 x^2 /(1+x^2) .$$

Используя метод односторонних вариаций, описанный в [13], найдем искомые экстремали:

$$f(x)=\begin{cases} c_1\exp\left[\nu_1\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right)+\nu_2\left(x^2+\dfrac{x^4}{2}\right)\right] & , \quad x\in(-\infty;x_1) \\ c_1\exp\left[\nu_1\left(x_1+\dfrac{x_1^3}{3}\right)+\nu_2\left(x_1^2+\dfrac{x_1^4}{2}\right)\right] & , \quad x\in[x_1;x_2] \\ c_1\left(\dfrac{x}{x_2}\right)^{\nu_1}\exp\left[\nu_1\left(x_1+\dfrac{x_1^3}{3}\right)+\nu_2\left(x_1^2+\dfrac{x_1^4}{2}\right)+\right. & \\ \left.+\dfrac{1}{2}\mu_1(x^2-x_2^2)+2\mu_2(x-x_2-\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3}x_2^3)\right] & , \quad x\in(x_2;\infty) \end{cases}. \qquad (8)$$

Постоянные величины c_1, ν_1, ν_2, μ_1, μ_2 и точки сопряжения x_1, x_2, входящие в функцию (8), определяются из решения системы, состоящей из уравнений: $f(-\infty)=0$, $f(\infty)=0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\infty)dx=1$, $m_{22}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_2(x)dx$, $m_{21}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\ f_2(x)dx$ и двух условий непрерывности функции $f(x)$ в точках x_1, x_2.

На рис. 1 изображен график закона распределения, полученный в результате замены одного ограничения (2) неравенствами Чебышева. График включает участок функции расположенной внутри области, определяемой неравенствами Чебышева (красная линия) и два участка, проходящие по границе указанной области. Точки сопряжения обозначены A и B.

Также на рис. 1 представлен закон распределения, полученный в результате решения задачи (1)-(5) (синяя линия).

Таким образом, в статье описан метод характеризации закона распределения ОП СТС, основанный на использовании неравенств Чебышева. Метод позволяет свести вариационную задачу характеризации закона распределения (1)-(5) к неклассической задаче оптимизации, содержащей в качестве ограничений неравенства. Размерность соответствующей краевой задачи будет меньше, чем размерность исходной задачи, в случае использования ограничений на статистические моменты ОП элементов СТС. Полученное разработанным методом решение может рассматриваться как альтернативное, приближенное решение задачи характеризации свойством максимума энтропии.

Разработанный метод используется на начальных этапах проектирования СТС с метрологическим обеспечением.

Целесообразность использования неравенств Чебышева определяется не только возможностями приближенного решения классической задачи оптимизации, но и возможностями выявления качественной картины и структуры оптимального закона распределения ОП СТС.

Литература

1. İçen D., Ersel D. A new approach for probability calculation of fuzzy events in Bayesian Networks. International Journal of Approximate Reasoning. vol. 108. pp. 76-88, 2019. doi: 10.1016/j.ijar.2019.03.004.

2. Higgins V., Asgari S., Adeli, K. Choosing the best statistical method for reference interval estimation. Clinical Biochemistry. vol. 71, pp. 14-16, 2019. doi: 10.1016/j.clinbiochem.2019.06.006.

3. Touzani S., Ravache B., Crowe E., Granderson J. Statistical change detection of building energy consumption. Applications to savings estimation. Energy and Building Journal, vol. 18, no. 515, pp. 123-136, 2019. doi: 10.1016/j.enbuild.2018.12.020.

4. Park T., Kim Y., Lee J. Reinforced genetic algorithm using clustering based on statistical estimation. IFAC–Paper Online, vol. 51, Art. no. 182018, pp. 287-291, 2018. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.09.314.

5. Болотин В.В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. Москва. Машиностроение. 1984. 312с.

6. Проников А.С. Надежность машин. Москва. Машиностроение. 1978. 591с.

7. Волков Е.Б., Судаков Р.С., Сырыщин Т.А. Основы теории надежности ракетных двигателей. Москва. Машиностроение, 1974. 403 с.

8. Стяжкин В.А., Хайруллин Р.З. Корреляция математической и эмпирической моделей поля ионизирующих излучений дозиметрической установки упд-интер. Вестник метролога. 2024, № 3, с.14-19.

9. Боровой В.В., Наугольнов О.А., Мыслимов Д.А., Шахов Д.В., Киллер А.И., Ланкин И.М. Математические модели погрешности измерения основной кривой намагничивания листовой электротехнической стали // Инженерный вестник Дона. 2021, № 8. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n8y2021/7173/.

10. Боев В.К., Доля В.К., Круглов А.К., Фомушкин А.В., Шаблицкий А.Ю. Портативный прибор для наладки, калибровки и поверки измерительных каналов, содержащих пьезоэлектрический преобразователь // Инженерный вестник Дона. 2010, № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2010/208.

11. Костоглотов А.А., Лазаренко С.В., Пугачев И.В. Синтез систем фазовой автоподстройки частоты в условиях возмущений на основе модели объединенного принципа максимума и дискретного метода инвариантного погружения // Инженерный вестник Дона. 2020, №12. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n12y2020/6710.

12. Мартыщенко Л.А., Панов В.В. Методы военно-научных исследований в задачах разработки и испытания вооружения. Часть 1. Москва. 1981. 125 с.

13. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Москва. Изд. МГУ. 2000. 424 с.

References

1. Icen D., Ersel D. International Journal of Approximate Reasoning. 2019. №108. pp.76-88.

2. Higgins V., Asgari S., Adeli, K. Clinical Biochemistry. 2019. №71. pp.14-16.

3. Touzani S., Ravache B., Crowe E., Granderson J. Energy and Building Journal. 2019. №18. pp.123-136.

4. Park T., Kim Y., Lee J. IFAC–Paper Online. 2018. pp.287-291.

5. Bolotin V.V. Prognozirovaniye resursa mashin i konstruktsiy [Forecasting the resource of machines and structures]. Moskva. Mashinostroyeniye. 1984. 312p.

6. Pronikov A.S. Nadezhnost' mashin [Reliability of machines]. Moskva. Mashinostroyeniye. 1978. 591p.

7. Volkov E.B., Sudakov R.S., Syryshchin T.A. Osnovy teorii nadezhnosti raketnykh dvigateley [Fundamentals of the theory of reliability of rocket engines] . Moskva. Mashinostroyeniye, 1974. 403p.

8. Styazhkin V.A., Khayrullin R.Z. Vestnik metrologa. 2024, № 3, p.14-19.

9. Borovoy V.V., Naugol'nov O.A., Myslimov D.A., Shakhov D.V., Killer A.I., Lankin I.M. Inzhenernyy vestnik Dona. 2021, № 8. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n8y2021/7173/.

10. Boyev V.K., Dolya V.K., Kruglov A.K., Fomushkin A.V., Shablitskiy A.Yu. Inzhenernyy vestnik Dona. 2010, № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2010/208/.

11. Kostoglotov A.A., Lazarenko S.V., Pugachev I.V. Inzhenernyy vestnik Dona. 2020, №12. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n12y2020/6710/.

12. Martyshchenko L.A., Panov V.V. Metody voyenno-nauchnykh issledovaniy v zadachakh razrabotki i ispytaniya vooruzheniya. Chast' 1 [Methods of military scientific research in the tasks of development and testing of weapons]. Moskva. 1981. 125p.

13. El'sgol'ts L.E. Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoye ischisleniye [Differential equations and calculus of variations]. Moskva. Izd. MGU. 2000. 424p.

Дата поступления: 24.09.2024

Дата публикации: 2.11.2024