

## Алгоритм непараметрической оценки плотности распределения вероятностей переходов для марковской модели динамики численности сотрудников вуза

*О.А. Зятева, Е.А. Питухин, Р.В. Воронов, Л.В. Щеголева*

*Петрозаводский государственный университет*

**Аннотация:** В статье рассматривается построение алгоритма непараметрической оценки плотности распределения вероятностей переходов для марковской модели динамики численности сотрудников вуза. Решается задача восстановления плотности распределения вероятности перехода по ретроспективной выборке малого объема. Результатом решения является матрица вероятностей перехода, элементы которой суть случайные величины с законами распределения, полученными по ретроспективным данным. Отличительной особенностью алгоритма является одновременный учет областных и функциональных ограничений на значения вероятностей перехода. Экспериментально подтверждена сходимость алгоритма.

**Ключевые слова:** плотность вероятности, непараметрическая оценка, марковская модель, малые выборки, имитационное моделирование, движение кадров вуза, публикационная активность

### Введение

Важнейшей составляющей работы организации являются исследования, которые помогают решать вопросы стратегического планирования и информационного обеспечения процессов принятия управленческих решений на научно-обоснованном уровне [1, 2]. Особенно это актуально для высших учебных заведений, которые стремятся достичь высоких показателей деятельности, занять высокие позиции в национальных и мировых рейтингах, тем самым увеличить количество абитуриентов и число организаций-партнеров. Это даст возможность получать дополнительные меры поддержки, которые необходимы для развития организации [3, 4].

При решении управленческих задач вузы сталкиваются с множеством проблем [5], особенно если необходимо

---

повысить собственную эффективность за счет внутренних возможностей организации. Это связано с тем, что на достижение различных показателей основное влияние оказывает кадровый потенциал организации [6], большая часть которого – профессорско-преподавательский состав [7].

Показатели научной деятельности лежат в основе построения многих рейтингов, а также они дают возможность организациям-партнерам оценить научный потенциал коллектива университета. Наиболее репрезентативными из них являются показатели публикационной активности, которые отражают высокий уровень и качество представленных результатов [8–9].

Обзор исследований показал, что вопросы управления эффективностью деятельности вуза актуальны. Целью данного исследования является построение прогнозов показателей публикационной активности вузов за счет внутренних возможностей организации.

Объектом исследования являются вузы России, предметом – показатели деятельности, в данном случае – научные.

### **Математическая модель прогнозирования числа публикаций сотрудников вуза**

Для решения задачи прогнозирования числа публикаций к заданному периоду, была построена математическая модель однородного марковского процесса с дискретным временем зависимости числа публикаций от внутренних возможностей организации. При ее построении все сотрудники были распределены по шести выделенным группам в зависимости от числа ежегодных публикаций («0», «1-2», «3-4», «5-6», «7-8», «≥ 9»). По ретроспективным данным были построены матрицы вероятностей перехода сотрудников ( $P \in R^{6 \times 6}$ ) из одной группы в другую по годам в разрезе категорий [10]. Анализ результатов показал, что желаемые значения

---

показателей публикационной активности достигаются либо за большой временной промежуток, либо требуют значительных кадровых изменений, что в реальности невозможно. Это свидетельствует о необходимости продолжения исследования и доработки математической модели.

Поэтому, во-первых, для обеспечения возможности влияния на результаты публикационной активности, в модели необходимо учесть управляющие параметры. Во-вторых, для повышения адекватности результатов моделирования реальным данным, матрицу вероятностей перехода  $P$  следует задать стохастической, элементы которой являлись бы случайными величинами, с законом распределения соответствующему ретроспективным данным. Таким образом, с учетом предложенных изменений, математическая модель, предложенная в [10, 11] была усовершенствована до математической модели (1) динамики численности сотрудников вуза с учетом вектора управляющих параметров  $\mu$  и стохастической матрицы вероятностей переходов  $P^*(\mu)$ . Число публикаций в следующий момент времени рассчитывается, как произведение численности группы на среднее число публикаций ней  $\omega(\mu)$ .

$$\begin{cases} S_{t+1}(\mu) = P^*(\mu) \times S_t(\mu) + U_t^{in} - U_t^{out}, & P^*(\mu) = \{p_{ij}^*\} \in R^{n \times n}, S(\mu) \in R^{n \times 1} \\ A_{t+1}(\mu) = \omega(\mu) \cdot S_{t+1}(\mu), & \omega(\mu) \in R^{1 \times n}, t \in [t_0, t_f] \end{cases} \quad (1)$$

где  $\mu = (n_b, c_b, T_l, L, VG_l, E_l) \in \Omega_\mu$  – вектор управляющих параметров;  $n_b$  – количество баллов за публикацию;  $c_b$  – стоимость 1 балла;  $T_l$  – нагрузка на 1 ставку ППС группы  $l$  ( $l = 1..6$ );  $L$  – материально-техническая база вуза;  $VG_l$  – внутренние гранты организации, выделенные группе  $l$ ;  $E_l$  – премирование за достигнутые результаты группы  $l$ ;  $P^*(\mu)$  – стохастическая матрица вероятностей переходов из одной группы в другую.

## Алгоритм оценки плотности распределения вероятностей переходов для марковской модели

Для определения элементов матрицы вероятностей перехода был разработан алгоритм непараметрической оценки плотности распределения вероятностей переходов  $P^*(\mu)$  для марковской модели динамики численности сотрудников вуза (далее – Алгоритм).

*Алгоритм:*

*Шаг 1.* Ввод данных матриц вероятностей перехода сотрудников в разрезе категорий из одной группы в другую за ретроспективный период  $(t_s, t_0 - 1)$  обозначают начало и конец ретроспективного периода,  $T_s = t_0 - t_s$  – длина периода ретроспективы).  $P_t = \{(p_{ij})_t\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $n$  – число групп,  $t \in [t_s, \dots, t_0 - 1]$ .

*Шаг 2.* Для каждого  $p_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, 6$ ,  $j = 1, \dots, 6$  определение максимального и минимального значения (формирование матриц областных ограничений) и вычисление средних значений элементов матриц за  $T_s$  лет.

$$\bar{p}_{ij} = \frac{1}{T_s} \sum_{t=1}^{T_s} (p_{ij})_t, P_{max_{ij}} = \max \{(p_{ij})_t\} \cup t \in [t_s, \dots, t_0 - 1],$$

$$P_{min_{ij}} = \min \{(p_{ij})_t\} \cup t \in [t_s, \dots, t_0 - 1].$$

*Шаг 3.* Генерация наблюдений из равномерного распределения  $a_t \sim U[0,1]$ ,  $t \in [t_s, \dots, t_0 - 1]$ .

*Шаг 4.* Подсчет суммы наблюдений  $s = \sum_{t=1}^{T_s} a_t$ .

*Шаг 5.* Вычисление случайных весовых коэффициентов  $b_t = \frac{a_t}{s}$ .

*Шаг 6.* Вычисление средневзвешенной линейной комбинации элементов матриц вероятностей перехода  $p_{ij}^* = \sum_{t=1}^{T_s} b_t \cdot (p_{ij})_t$ .

*Шаг 7.* Повторение шагов 3, 4, 5, 6  $N$  раз и вычисление среднего значения каждого элемента  $\bar{p}_{ij}^* = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N (p_{ij}^*)_l$ ,  $i = 1, \dots, 6$ ,  $j = 1, \dots, 6$ .

Предложенный Алгоритм был реализован в среде MathCAD. Отличительной особенностью Алгоритма является одновременный учет областных (максимальное и минимальное значения вероятностей перехода) и функциональных (сумма вероятностей по столбцам должна быть равна 1) ограничений на значения вероятностей перехода.

Основной идеей Алгоритма, позволяющей применять его в процессе имитационного моделирования, является использование средневзвешенной линейной комбинации элементов матрицы вероятностей переходов с нормированными случайными весами из равномерного закона распределения.

В результате работы Алгоритма элементы матрицы вероятностей перехода  $P^*$  распределились по усеченному нормальному закону распределения. На рисунке 1 представлены примеры восстановления плотности распределения для различных элементов.

Значение средней относительной ошибки между оценкой математического ожидания и его исходным значением стремится к нулю с увеличением числа испытаний, что экспериментально подтверждает сходимость алгоритма. На рисунке 2 показана сходимость к нулю средней  $mean(\delta\bar{P})$  и максимальной  $max(\delta\bar{P})$  относительных ошибок Алгоритма с ростом числа экспериментов, где:

$$\delta\bar{p}_{ij} = \frac{|\bar{p}_{ij}^* - \bar{p}_{ij}|}{\bar{p}_{ij}},$$

$$\delta\bar{P} = \{\delta\bar{p}_{ij}\}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n,$$

$N_q$  – число испытаний в  $q$ -м эксперименте,  $N_{q+1} = 2N_q$ ,  $N_0 = 1000$ .

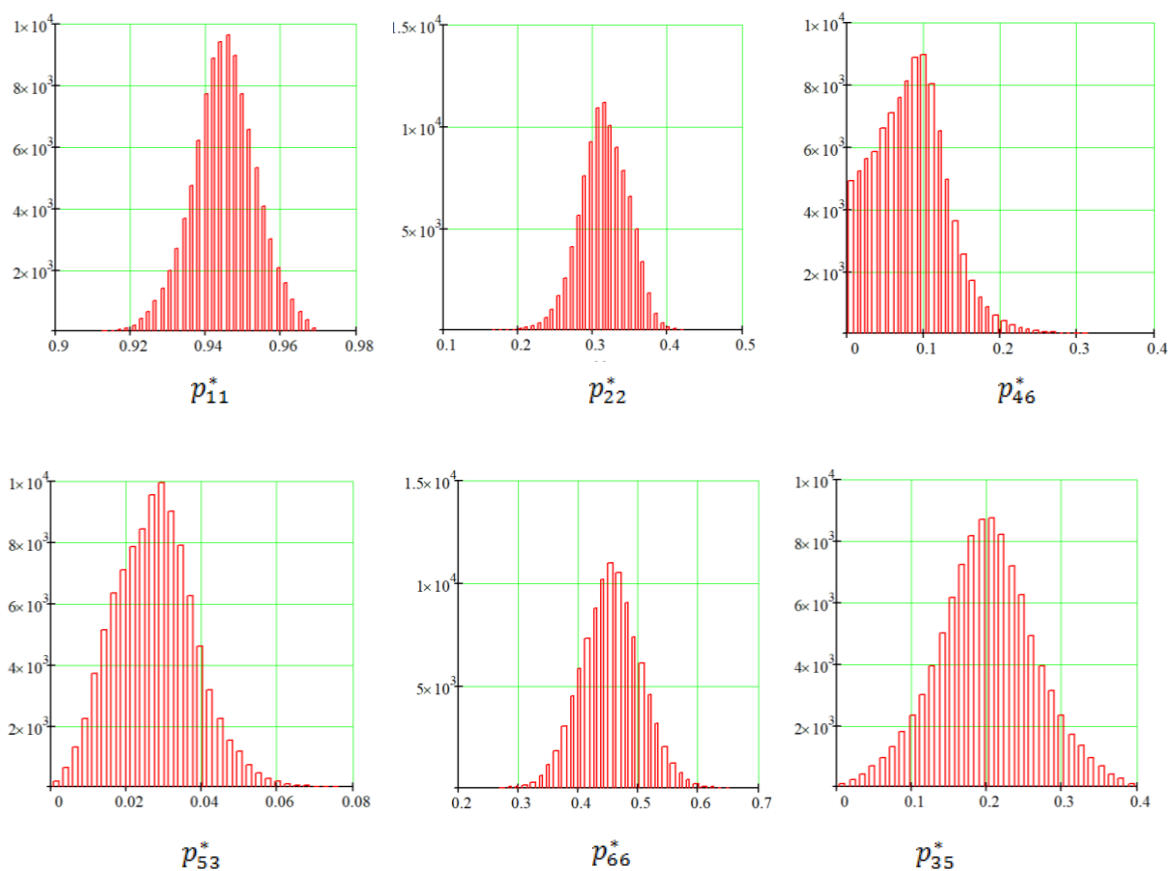


Рис. 1. – Плотность распределения элементов матрицы вероятностей перехода  $P^*(\mu)$

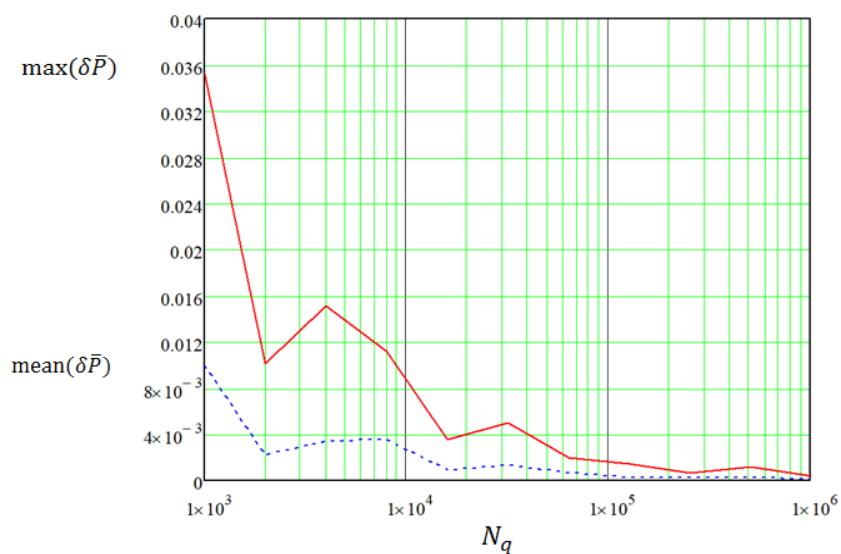


Рис. 2. – График изменения  $\text{mean}(\delta\bar{P})$  и  $\max(\delta\bar{P})$  Алгоритма

Достоинством данного Алгоритма является возможность оценки вероятностей переходов при отсутствии большого числа ретроспективных данных.

Предложенный Алгоритм был успешно использован при имитационном моделировании прогнозных значений показателей научной деятельности вузов и их мест в рейтинге [11].

### **Заключение**

В результате данного исследования был разработан и реализован алгоритм непараметрической оценки плотности распределения вероятностей переходов для марковской модели динамики численности сотрудников вуза, одновременно учитывающий областные и функциональные ограничения.

Алгоритм позволяет проводить оценку плотности вероятностей переходов с учетом областных и функциональных ограничений по малым ретроспективным данным.

Экспериментально подтверждена сходимость алгоритма при увеличении числа испытаний.

### **Литература**

1. Князев Е.А., Дрантусова Н.В. Институциональная динамика в российском высшем образовании: механизмы и траектории // Университетское управление: практика и анализ. 2013. № 1 (83). С. 6–17.
2. Knyazev Y., Drantusova N. European scales and institutional transformation in Russian higher education // Voprosy Obrazovaniya / Educational Studies Moscow. 2014 (2). P. 109–131.
3. Островкин Д.Л., Сандлер Д.Г. Стратегическое управления в вузе: современный взгляд российских авторов // Альманах Крым. 2021. № 28. С. 69–87.



4. Судакова А.Е., Сандлер Д.Г., Тарасьева Т.В. Конкуренция между вузами: концептуальный анализ // Университетское управление: практика и анализ. 2020. Т. 24. № 4. С. 58–74.
  5. Котенко Ю.С., Названова И.А., Подопригора М.Г. Проблемы современного вуза и маркетинговые методы их выявления и оценки // Инженерный вестник Дона, 2013, №2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1631](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1631).
  6. Зайцева Е.В., Исламутдинов Т.И. Оценка кадрового научного потенциала федеральных университетов // Universe of university. Сборник материалов Международной научной интернет-конференции. 2021. С. 111–115.
  7. Sandler D.G., Gladyshev D.A., Kochetkov D.M., Zorina A.D. Factors of research groups' productivity: The case of the Ural Federal University // R-Economy. 2022. № 8(2). P. 148–160.
  8. Klochkov Y. Analysis of the Publication Activity of University Researchers // Proceedings - 2019 Amity International Conference on Artificial Intelligence, AICAI. 2019. P. 74–79.
  9. Krasovska O., Andrushchenko V., Velichko I. Scientific Cooperation in Basic Research and Higher Education // Cultural Psychology of Education. 2018. № 7. P. 53–58.
  10. Zyateva O.A., Pitukhin E.A., Peshkova I.V. Modeling Publication Activity of the Faculty and Managing Scientific Indicators of the University // SPBPU IDE '19: Proceedings of the 2019 International SPBPU Scientific Conference on Innovations in Digital Economy. 2019. P. 1–5.
  11. Зятева О.А. Имитационное моделирование показателей научной деятельности вузов // Инженерный вестник Дона, 2022, №5. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2022/7670](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2022/7670).
-



## References

1. Knyazev Y. A., Drantusova N.V. Universitetskoe upravlenie: praktika i analiz. 2013. № 1 (83). pp. 6–17.
2. Knyazev Y., Drantusova N. Voprosy Obrazovaniya. Educational Studies Moscow. 2014 (2). pp. 109–131.
3. Ostrovkin D.L., Sandler D.G. Al'manah Krym. 2021. № 28. pp. 69–87.
4. Sudakova A.E., Sandler D.G., Tarasyeva T.V. Universitetskoe upravlenie: praktika i analiz. 2020. Vol. 24. №4. pp. 58–74.
5. Kotenko Yu.S., Nazvanova I.A., Podoprigora M.G. Inzhenernyj vestnik Dona, 2013, №2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1631](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1631).
6. Zaitseva E.V., Islamutdinov T.I. Universe of university. Sbornik materialov Mezhdunarodnoj nauchnoj internet-konferencii, 2021. pp. 111–115.
7. Sandler D.G., Gladyshev D.A., Kochetkov D.M., Zorina A.D. R-Economy. 2022. № 8(2). pp. 148–160.
8. Klochkov Y. Proceedings - 2019 Amity International Conference on Artificial Intelligence, AICAI, 2019. pp. 74–79.
9. Krasovska O., Andrushchenko V., Velichko I. Cultural Psychology of Education. 2018. № 7. pp. 53–58.
10. Zyateva O.A., Pitukhin E.A., Peshkova I.V. SPBPU IDE '19: Proceedings of the 2019 International SPBPU Scientific Conference on Innovations in Digital Economy, 2019. pp. 1–5.
11. Zyateva O.A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2019, №4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2022/7670](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2022/7670).