

---

## Метод квазиоптимального синтеза многорежимных систем синхронизации в условиях регулярных возмущений на основе объединенного принципа максимума

*А.А. Костоглотов<sup>1,2</sup>, А.А. Агапов<sup>2</sup>, С.В. Лазаренко<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Донской государственной технической университет*

<sup>2</sup>*Ростовский государственный университет путей сообщения*

**Аннотация:** Разработан метод квазиоптимального синтеза многорежимной системы синхронизации на основе условия максимума функции обобщенной мощности. Эффективность ее функционирования в режиме захвата демонстрируется на основе математического моделирования. Результаты показали высокую устойчивость к возмущениям и снижение ошибки синхронизации многорежимной системы в установившемся режиме.

**Ключевые слова:** фазовая автоподстройка частоты, объединенный принцип максимума, многорежимное управление.

### Введение

Задача построения систем фазовой синхронизации остается актуальной по настоящее время [1–3]. Для этого широко используются методы теории автоматического управления [4,5]. Это прежде всего связано с исключительной сложностью решения исходной стохастической задачи синтеза, которую на основе метода двухэтапной оптимизации сводят к последовательности детерминированных задач с применением упрощающих гипотез [6,7]. Использование линейных математических моделей дает возможность применения развитого математического аппарата теории устойчивости, символического метода, частотных методов синтеза и т.д. Однако, в режиме захвата и в условиях регулярных возмущений классические варианты петли обратной связи могут не обеспечивать необходимой эффективности систем фазовой синхронизации, что требует синтеза корректирующего управления. Один из его вариантов реализуется в виде релейного управления, чтобы «в соответствии с принципом управления обеспечить изменение знака мгновенной расстройки по частоте» [8], но достаточно сложно провести оценку близости такого решения к

оптимальному. В тоже время задача квазиоптимального синтеза корректирующих управлений для функционирующих в условиях возмущений систем фазовой синхронизации может быть сформулирована как экстремальная задача синтеза многорежимного управления. Анализ известных исследований показывает, что конструктивные результаты ее решения могут быть получены на основе объединенного принципа максимума (ОПМ).

В данной работе в качестве исходной системы рассматривается система фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) с однозвенным  $RC$ -фильтром и корректирующей петлей авторегулирования, синтезированной с использованием объединенного принципа максимума [9]. Это решение обеспечивает снижение времени захвата, а также расширение полосы захвата и удержания в сравнении с ФАПЧ с однозвенным  $RC$ -фильтром. Резервом повышения эффективности функционирования системы [10, 11] является снижение ошибки синхронизации с учетом помех.

Целью работы является повышение эффективности ФАПЧ [12] в условиях регулярных возмущений на основе решения экстремальной задачи квазиоптимального синтеза многорежимного управления с использованием ОПМ.

#### Объединенный принцип максимума

Рассматривается голономная управляемая динамическая система, интеграл действия которой имеет вид [13]

$$R = \int_0^{t_1} (T + A) dt, \quad (1)$$

где  $T = \frac{1}{2} \sum_{s,k=1}^n a_{sk} \dot{q}_s \dot{q}_k$  – кинетическая энергия системы;  $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$  – вектор

обобщенных координат;  $a_{sk}$  – коэффициенты инерции;  $A = \int_{\mathbf{q}(0)}^{\mathbf{q}(t_1)} \sum_{s=1}^n Q_s dq_s$  –

работа обобщенных внешних сил;  $\mathbf{Q} = [Q_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}), \dots, Q_l(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u})]^T$  – непрерывный по совокупности переменных вектор обобщенных сил;  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_m]^T$  – вектор управления;  $\mathbf{q}(0)$ ,  $\mathbf{q}(t)$  – соответственно начальное и текущее состояние вектора обобщенных координат;  $n = \dim \mathbf{q} \geq m = \dim \mathbf{u}$ ;  $^T$  – знак транспонирования, точкой обозначена производная по времени.

Положим, что движение системы из начального состояния

$$t = 0, \mathbf{q}(0) = [q_{10}, \dots, q_{n0}]^T, \dot{\mathbf{q}}(0) = [\dot{q}_{10}, \dots, \dot{q}_{n0}]^T \quad (2)$$

в конечное  $t = t_1, \mathbf{q}(t_1) = [q_{11}, \dots, q_{n1}]^T, \dot{\mathbf{q}}(t_1) = [\dot{q}_{11}, \dots, \dot{q}_{n1}]^T$  (3)

под действием управляющего воздействия  $\mathbf{u}$  удовлетворяет соотношению, аналогичному принципу Гамильтона-Остроградского для интеграла действия (1)

$$\delta R = \int_0^{t_1} (\delta T + \delta' A) dt = 0, \quad (4)$$

где  $\delta'$  – бесконечно малая величина, не являющаяся вариацией величины  $A$  [13]

$$\delta' A = \sum_{s=1}^n Q_s \delta q_s.$$

Если данное требование выполняется, то для системы справедливы уравнения Лагранжа второго рода [13]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s, s = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Пусть задана скалярная знакопостоянная функция  $F(\mathbf{q})$ , непрерывная по частным производным на всей области определения. Сформулируем задачу оптимального уравнения: определить вектор-функции  $\mathbf{u}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  и  $\mathbf{q}(t)$ , доставляющие минимум функционалу

$$J_1 = \int_0^{t_1} F(\mathbf{q}) dt \rightarrow \min$$

при условиях (2), (3), (4) и ограничении

$$\mathbf{u} \in \bar{G}_u,$$

где  $\bar{G}_u$  – замкнутое множество допустимых управлений.

Рассмотрим расширенный функционал следующего вида [14–16]:

$$J = \int_0^{t_1} (F(\mathbf{q}) + \lambda(T + A)) dt, \quad (6)$$

где  $\lambda$  – множитель Лагранжа. Пусть  $\mathbf{u} \in \bar{G}_u$  – произвольное допустимое управление. Тогда, если  $\tilde{\mathbf{u}}$  доставляет минимум функционалу (6), необходимо чтобы его вариация была неотрицательна

$$\delta J \geq 0$$

для любых допустимых вариаций  $\delta \mathbf{u}$ . Решение такой экстремальной задачи сформулировано в форме условия максимума функции обобщенной мощности [14–16]

$$\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{Q}(\mathbf{u}), \lambda, \xi) = \max \sum_{s=1}^n [\lambda Q_s + V_s] \dot{q}_s,$$

где  $\mathbf{V} = \text{grad}F$ , и выполняются условия трансверсальности

$$H|_0^{t_1} = \lambda(A + T) + F|_0^{t_1}.$$

Из этих соотношений выражение для оптимальной обобщенной силы  $Q_s$  получает вид

$$Q_s = \lambda^{-1} [\mu_s p_s - V_s], s = \overline{1, n},$$

где  $\mu_s$  – синтезирующая функция [14–16]. Показано, что соответствующий закон управления определяется выражением

$$Q_s = \lambda^{-1} \left[ -\frac{|\dot{q}_s| p_s}{\lambda^{-1} |V_s|} - V_s \right], s = \overline{1, n}, \quad (7)$$

откуда в силу (5) динамическая модель [17]

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{d\dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s(q_s, p_s, \lambda). \quad (8)$$

Аппроксимация модели управляемого движения на основе принципа инвариантности Лагранжиана [16] позволяет привести (8) к линейному

дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами [14]:

$$\ddot{q}_s + a_{ss} \sqrt{\lambda^{-1}} \dot{q}_s + \lambda^{-1} V_s = 0, \quad s = \overline{1, n}. \quad (9)$$

**Синтез многорежимных систем синхронизации на примере систем фазовой автоподстройки частоты, функционирующих в условиях возмущений**

На рис. 1 показана структурная схема простейшей системы ФАПЧ, которая включает фазовый дискриминатор (ФД), петлевой фильтр (ПФ), подстраиваемый генератор (ПГ). Крутизна характеристики подстраиваемого генератора определяет полосу удержания  $\Omega_y$  [18–20].

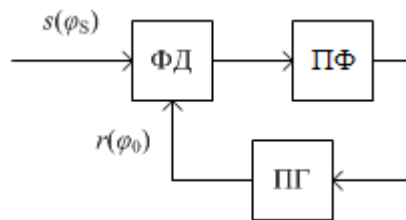


Рис. 1. – Структурная схема простейшей системы ФАПЧ

Выбирая в качестве петлевого фильтра однозвенный  $RC$ -фильтр, получим нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее систему ФАПЧ [18–20]

$$T_F \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt} + \Omega_y F(\varphi) = \omega_n, \quad (10)$$

где  $\varphi(t)$  – разница фаз сигнала и подстраиваемого генератора;  $F(\varphi) = \sin(\varphi)$  – выход фазового дискриминатора,  $\omega_n$  – разность угловых частот сигнала и подстраиваемого генератора в начальный момент времени  $t_0$ , начальные условия  $(\varphi(t_0), \dot{\varphi}(t_0))$ ,  $T_F$  – постоянная времени. В уравнении (10) работа системы ФАПЧ второго порядка описывается без учета шума и детерминированных помех. Данное уравнение допускает представление в форме уравнения Лагранжа второго рода. Следовательно, может быть поставлена задача синтеза многорежимного управления для ФАПЧ на основе

объединенного принципа максимума: требуется определить вектор допустимых управлений  $|u| < U$ , переводящий систему

$$T\ddot{\phi} + \dot{\phi} + \Omega_y \sin(\phi) = \omega_n + u \quad (11)$$

из начальной произвольной точки фазового пространства  $(\phi(t_0), \dot{\phi}(t_0))$  в конечную  $(0,0)$  и доставляющий минимум функционалу

$$J = \int_0^{t_1} \phi^2 dt. \quad (12)$$

Исследуется случай, когда ФАПЧ имеет два режима функционирования. Тогда в соответствии с [21] многорежимное управление может быть представлено как допустимые управления  $u_1$  и  $u_2$ , следующие одно за другим.

Очевидно, что в режиме захвата в начале функционирования или при воздействии регулярных неконтролируемых воздействий большой интенсивности корректирующее управление должно быть максимально допустимым, т.е. решение экстремальной задачи (11), (12) следует выбирать среди кусочно-постоянных функций. Режим функционирования ФАПЧ реализуется с использованием (7):

$$u_1 = \Omega_y \lambda_1^{-1} |U| \operatorname{sign} \left( \frac{D|\dot{\phi}|\dot{\phi}}{L|\phi| + \varepsilon} \frac{T}{\Omega_y} + \phi \right), \lambda_1^{-1} = \operatorname{const}, \quad (13)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{T} (\omega_n - u_1 - \dot{\phi} - \Omega_y \sin(\phi)).$$

Выражение (13) определяет режим функционирования ФАПЧ и в случае «проявлении признаков кризисного развития процесса ...» [8].

В режиме синхронизации целесообразно использовать аппроксимацию (9):

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{T} (\omega_n - (\tilde{\lambda} + 1)\dot{\phi} - \lambda^{-1}\phi - \Omega_y \sin(\phi)).$$

Результаты математического моделирования представлены на рисунках 2 и 3, где обозначены кривые, которые соответствуют ФАПЧ с корректирующей петлей авторегулирования [12, 22, 23] (темно-серая линия

на рисунке 2 и сплошная на рисунке 3) и ФАПЧ с многорежимным управлением (светло-серая линия на рисунке 2 и пунктир на рисунке 3). В целях проведения сравнительного анализа выбраны следующие значения параметров:  $T = 0,014$  с;  $\Omega_y = 21$  рад/с;  $|U| = 5$ ;  $\lambda_1^{-1} = 0,5$ ;  $\varepsilon = 0,001$ ;  $D = 1$ ;  $L = 4$ ;  $\tilde{\lambda} = 2$ ;  $\lambda^{-1} = 4$ . Анализ результатов расчетов позволяет утверждать, что ФАПЧ с новым многорежимным управлением позволяет снизить фазовую ошибку в установившемся режиме в условиях эксперимента на 47% в сравнении с (13). При этом в условиях отсутствия возмущений обеспечивается нулевая фазовая ошибка, что позволяет использовать полученное решение для построения прецизионных измерителей дальности и скорости.

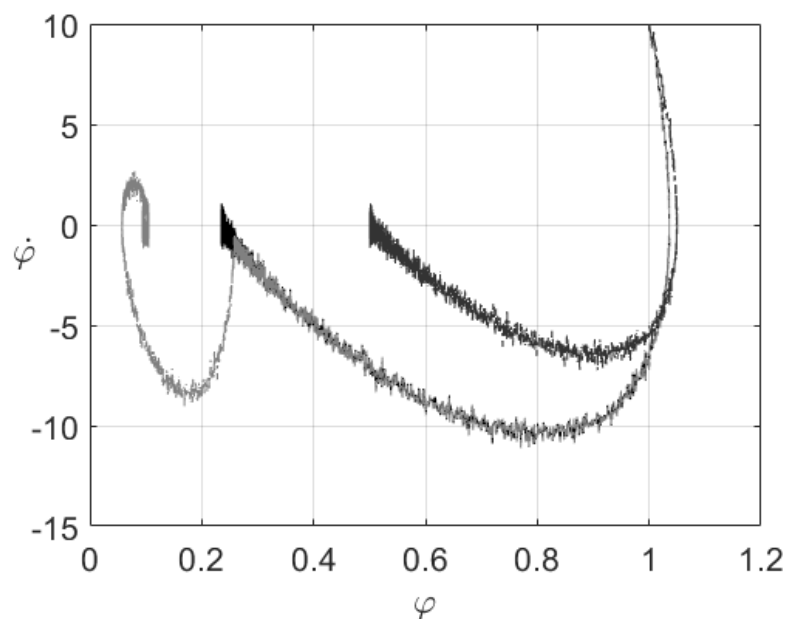


Рис. 2. – Фазовый портрет ФАПЧ

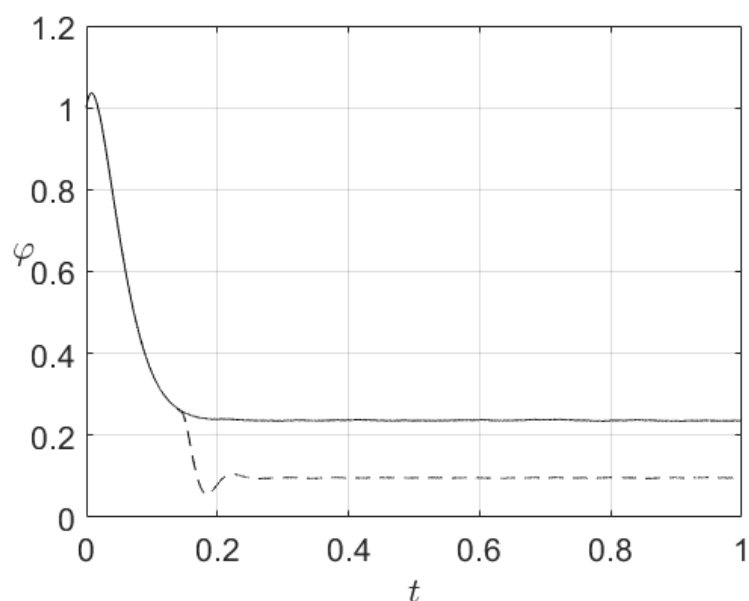


Рис. 3. – Ошибки синхронизации

#### Заключение

Разработан метод квазиоптимального синтеза многорежимных систем синхронизации в условиях регулярных возмущений на основе объединенного принципа максимума. Проведено исследование функционирования синтезированной многорежимной системы синхронизации в условиях возмущений. Установлено, что ее использование обеспечивает высокую устойчивость решения задачи захвата фазы и снижение фазовой ошибки в установившемся режиме в сравнении с ФАПЧ [12].

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 19-01-00151 А, 18-01-00385А, 18-08-01494А, 19-31-90134 Аспиранты.

#### Литература

1. Сафарьян О.А. Метод оценки частоты генераторов в условиях непрогнозируемого изменения длительности интервала измерений // Вестник Дон. гос. техн. ун-та, № 4, 2014. С. 142–150.



2. Sebastian M.F.R., Groshe G. Chirped frequency transfer: a tool for synchronization and time transfer // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, No. 61, 2014. pp. 191–416.
3. Li Z., Poddar A.K., Rohde U.L., Darioush A.S. Comparison of Optical Self-Phase Locked Loop Techniques for Frequency Stabilization of Oscillators // IEEE Photonics Journal, No. 5, 2014. pp. 50–72.
4. Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее применение. Москва: Машиностроение, 1972. 544 с.
5. Попов В.М. Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика, Т. 22, № 8, 1961. С. 23–31.
6. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981. 488 с.
7. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Том I. Теория обнаружения, оценок и линейной модуляции. М.: Сов. Радио, 1972. 744 с.
8. Геложе Ю.А., Клименко П.П., Максимов А.В. Организация процессов управления в системе фазовой синхронизации // Известия ЮФУ. Технические науки, № 2, 2009. С. 170–178.
9. Kostoglotov A.A., Lazarenko S.V., Andrashitov D.S., Deryabkin I.V. Synthesis of Phase-locked Loop System Structure with Adaptation Based on Combined-maximum Principle // MATEC Web of Conferences. 2016. Vol. 77.
10. Yamamoto H., Mori S. Performance of a binary quantized all digital phase-locked loop with a new class of sequential filter // IEEE Trans, No. 1, 1978. pp. 35–45.
11. Yukawa J., Mori S. A binary quantized digital phase-locked loop // IECSE, No. 12, 1973. pp. 79–85.
12. Костоглотов А.А., Малый В.А., Понкратов А.И., Приймаков С.Н., Чеботарев А.В. Система фазовой автоподстройки частоты в режиме захвата с

корректирующей петлей авторегулирования // Успехи современной радиоэлектроники, № 8, 2013. С. 32–36.

13. Лурье А.И. Аналитическая механика. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 824 с.

14. Костоглотов А.А., Лазаренко С.В., Дерябкин И.В., Манаенкова О.Н., Лосев В.А. Метод оптимальной фильтрации на основе анализа поведения инвариантов на характеристических траекториях в фазовом пространстве // Инженерный вестник Дона, № 4, 2016. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2016/3786](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2016/3786)

15. Костоглотов А.А., Кузнецов А.А., Лазаренко С.В., Лосев В.А. Синтез фильтра сопровождения со структурной адаптацией на основе объединенного принципа максимума // Информационно-управляющие системы, № 4, 2015. С. 2–9.

16. Kostoglotov A.A., Lazarenko S.V. Synthesis of adaptive tracking systems based on the hypothesis of stationarity of the Hamiltonian on the switching hypersurface // Journal of communications technology and electronics, Vol. 62, № 2, 2017. pp. 123–127.

17. Cessna J.R., Levy D.M. Phase noise and transient times for a binary quantized digital phase-locked loop in which Gaussian noise // IEEE Trans, №2, 1972. pp. 94–104.

18. Шахгильдян В.В., Ляховский А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972. 447 с.

19. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении. М.: Сов. радио, 1978. 600 с.

20. Manassewitsch V. Frequency synthesizers. New York etc., 1979. 382 p.

21. Костоглотов А.А., Лазаренко С.В., Дерябкин И.В., Лященко З.В., Манаенкова О.Н. Синтез адаптивных многорежимных регуляторов на основе комбинированного управления объединенного принципа максимума // Вестник РГУПС, № 3, 2016. С. 66–73.

---

22. Pasternak G., Whalin R.L. Analysis and synthesis of a digital phase-locked loop for FM demodulation // Bell Syst. Tech. J., 1968. pp. 97–105.

23. Van Trees H.L. Functional Techniques for the Analysis of the Nonlinear Behavior of Phase –Locked Loops // Proc. IEEE, No. 52, 1964. pp. 894–911.

#### References

1. Safar'yan O.A. Vestnik Don. gos. tekhn. un-ta. 2014. № 4. pp. 142–150.
  2. Sebastian M. F. Raupach, Gesine Groshe. Chirped frequency transfer: a tool for synchronization and time transfer. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. 2014. Vol. 61. pp. 191 – 416.
  3. Li Zhang, Ajay K. Poddar, Ulrich L. Rohde, Afshin S. Darioush. Comparison of Optical Self-Phase Locked Loop Techniques for Frequency Stabilization of Oscillators. IEEE Photonics Journal. 2014. No 5. pp. 50 – 72.
  4. Syu. D., Meier A. Sovremennaya teoriya avtomaticheskogo upravleniya i eye primeneniya [The modern theory of automatic control and its application]: per. s angl., pod red. YU.I. Topcheyeva. Leningrad. Mashinostroyeniye, 1972. 544 p.
  5. Popov V.M. Avtomatika i telemekhanika. 1961. V. 22, No 8. pp. 23–31.
  6. Moiseyev N.N. Matematicheskiye zadachi sistemnogo analiza [Mathematical problems of system analysis]. Moscow, Nauka, 1981. 488 p.
  7. Van Tris G. Teoriya obnaruzheniya, otsenok i modulyatsii. V. 1. Teoriya obnaruzheniya, otsenok i lineynoy modulyatsii [The theory of detection, estimation and modulation. Volume I. Theory of Detection, Estimation, and Linear Modulation]. Moscow, Sov. Radio, 1972. 744 p.
  8. Gelozhe YU.A., Klimenko P.P., Maksimov A.V. Izvestiya YUFU. Tekhnicheskkiye nauki. 2009. №2. pp. 170–178.
  9. Kostoglotov A.A., Lazarenko S.V., Andrashitov D.S., Deryabkin I.V. Synthesis of Phase-locked Loop System Structure with Adaptation Based on Combined-maximum Principle. MATEC Web of Conferences. 2016. Vol. 77. URL:[matecconf\\_icmmr2016\\_15002.pdf](http://matec-conferences.org/articles/matecconf/pdf/2016/40/matecconf_icmmr2016_15002.pdf).
-

10. Yamamoto H., Mori S. Performance of a binary quantized all digital phase-locked loop with a new class of sequential filter. IEEE Trans. 1978. No. 1. pp. 35–45.
11. Yukawa J., Mori S. A binary quantized digital phase-locked loop. IECE. 1973. No. 12. pp. 79 – 85.
12. Kostoglotov A.A., Malyy V.A., Ponkratov A.I., Priymakov S.N., Chebotarev A.V. Uspekhi sovremennoy radioelektroniki. 2013. № 8. pp. 32–36.
13. Lur'ye A. I. Analiticheskaya mekhanika [Analytical mechanics]. Moscow, Gos. izd. Fiz.-mat. lit. 1961. 824 p.
14. Kostoglotov A.A., Lazarenko S.V., Deryabkin I.V., Manayenkova O.N., Losev V.A. Inzenernyj vestnik Dona, 2016, № 4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2016/3786](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2016/3786)
15. Kostoglotov A.A., Kuznetsov A.A., Lazarenko S.V., Losev V.A. Informatsionno-upravlyayushchiye sistemy. 2015. № 4. pp. 2–9.
16. Kostoglotov A.A., Lazarenko S.V. Synthesis of Adaptive Tracking Systems Based on the Hypothesis of Stationarity of the Hamiltonian on the Switching Hypersurface. Journal of Communications Technology and Electronics. 2017. N 2. pp. 123–127.
17. Cessna J.R., Levy D.M. Phase noise and transient times for a binary quantized digital phase-locked loop in which Gaussian noise. IEEE Trans. 1972. No. 2. pp. 94 – 104.
18. SHakhgil'dyan V. V., Lyakhovskiy A. A. Sistemy fazovoy avtopodstroyki chastity [Phase Locking Systems]. Moscow, Svyaz'. 1972. 447 p.
19. Lindsey V. Sistemy sinkhronizatsii v svyazi i upravlenii [Synchronization systems in communication and control]. Moscow, Sov. radio. 1978. 600 p.
20. Manassewitsch V. Frequency synthesizers. New York etc., 1979. 382 p.
21. Kostoglotov A.A., Lyashchenko Z.V., Lazarenko S.V., Deryabkin I.V., Manayenkova O.N. Vestnik Rostovskogo gosudarstvennogo universiteta putey soobshcheniya. 2016. № 3. pp. 124 – 132.



22. Pasternak G., Whalin R.L. Analysis and synthesis of a digital phase-locked loop for FM demodulation. Bell Syst. Tech. J. 1968. pp. 97 – 105.
23. Van Trees H.L. Functional Techniques for the Analysis of the Nonlinear Behavior of Phase –Locked Loops. Proc. IEEE. 1964. Vol. 52. pp. 894 – 911.